**Jurnal Pustaka Cendekia Pendidikan**
Volume 02, No. 03, Januari-April 2025, pp. 184-189
E-ISSN: 2988-7720
Website: https://pcpendidikan.org/index.php/jpcp

# Menghitung Determinan Matriks Blok Menggunakan Ekspansi *Laplace*

Diah Fauziyah Putri

Program Studi Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Pahlawan Tuanku Tambusai,
Jl. Tuanku Tambusai No.23, Bangkinang, Kec. Bangkinang, Kabupaten Kampar, Riau
diahfauziahputri@gmail.com

***Abstract***

A matrix is an arrangement of numbers, symbols or expressions arranged in rows and columns to form a square. The matrix was first conceived by Arthur Caley in 1859 in the study of systems of linear equations and linear transformations. In matrix theory, the calculation of determinants is one of the studies that is often discussed. Calculation of the determinant associated with a small matrix ($n \leq 3$) is usually never a problem, only using the definition of the determinant can usually be solved immediately. However, calculating the determinant of a matrix with a large size is difficult to do if you only use the definition of the determinant. Several methods that can be used to calculate the determinant of a matrix are row reduction method, Laplace/cofactor expansion method and Schur's complement method. Another method that can be used is to change the matrix into a block matrix. To determine the determinant of the block matrix, the writer in this writing will use one of the methods, namely the Laplace/cofactor expansion method.
**Keywords:** Determinants, Matrix, Laplace Expansion

**Abstrak**

Matriks adalah susunan bilangan, simbol, atau ekspresi yang disusun dalam baris dan kolom sehingga membentuk suatu bangun persegi. Matriks pertama kali digagaskan oleh Arthur Caley pada tahun 1859 dalam studi sistem persamaan linear dan transformasi linear. Pada teori matriks, perhitungan determinan merupakan salah satu kajian yang sering dibahas. Perhitungan determinan terkait dengan matriks berukuran kecil ($n \leq 3$) biasanya tidak pernah menjadi masalah, hanya dengan menggunakan definisi determinan biasanya langsung dapat diselesaikan. Namun perhitungan determinan matriks dengan ukuran yang besar, sukar dilakukan jika hanya menggunakan definisi determinan. Beberapa metode yang dapat digunakan untuk menghitung determinan matriks adalah metode reduksi baris, metode ekspansi Laplace/kofaktor dan metode komplemen Schur. Metode lain yang dapat digunakan adalah dengan mengubah matriks tersebut menjadi matriks blok. Untuk menentukan determinan matriks blok tersebut, maka penulis pada penulisan kali ini akan menggunakan salah satu metode yaitu metode ekspansi Laplace/kofaktor.
**Kata Kunci:** Determinan, Matriks, Ekspansi Laplace



Corresponding author: Diah Fauziyah Putri
Email Address: diahfauziahputri@gmail.com (Jl. Tuanku Tambusai No.23, Bangkinang, Kab. Kampar, Riau)
Received 23 October 2024, Accepted 29 October 2024, Published 04 November 2024

## PENDAHULUAN

Suatu matriks (matrix) adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan- bilangan. Bilangan-bilangan dalam jajaran tersebut disebut entry dari matriks. Pada umumnya matriks dinotasikan dalam huruf besar, sedangkan elemen- elemennya dalam huruf kecil. Jumlah baris dan kolom menentukan ordo (dimensi) dari matriks, jadi m x n dibaca sebagai A adalah matriks yang mempunyai m baris dan n kolom. Jika jumlah baris dari suatu matriks sama dengan jumlah kolomnya ($m$=$n$) maka matriks tersebut dinamakan matriks bujur sangkar.

Ada banyak penerapan matriks dalam kehidupan sehari-hari seperti menyelesakan permasalahan matematika misalnya dalam menemukan solusi masalah persamaan linear, transformasi lienar yakni bentuk umum dari fungsi linear. Contohnya rotasi dalam 3 dimensi. Matriks juga seperti variable biasa yang bisa dikali, dijumlah, dikurang, dan didekomposisikan sehingga perhitungan lebih terstruktur. Selain itu matriks juga dikaitkan dengan penggunaan program linear dalam analisis input maupun output dalam ekonomi, statistic, maupun dalam bidang Pendidikan, manajemen, kimia dan bidang-bidang teknologi lainnya.

Suatu matriks elemen-elemennya dapat dipartisi atas beberapa baris atau kolom sub-sub matriks dan matriksnya disebut matriks blok. Matriks blok yang dibicarakan adalah matriks kuadrat yang dipartisi atas dua baris dan dua kolom sub-sub matriks yang disebut matriks blok 2 × 2 (Ilhamsyah et al., 2017).

Gambaran secara umum bentuk matriks blok 2 × 2 adalah sebagai berikut:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right]$$

Sehingga didapatkan:

$$M = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$$

**Teorema 2.2 : Untuk setiap matriks A berukuran n × n dengan 1 ≤ i, j ≤ n berlaku: det($A$) = $a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$.**

***ekspansi kofaktor/Laplace sepanjang baris i.***

**det($A$) = $a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$**

***ekspansi kofaktor/Laplace sepanjang baris j***

Perhitungan determinan menggunakan ekspansi laplace bisa dilakukan melalui baris atau kolom mana saja dengan rumus diatas dan nilai determinannya akan tetap sama, sehingga terbukti **teorema 2.2**

## METODE

Secara umum tulisan ini memuat latar belakang penulisan. Terdapat gambaran umum dari latar belakang tentang permasalahan yang dibahas. Kemudian disajikan teori-teori yang membantu penulisan dalam menyelesaikan masalah yang dipaparkan sebelumnya, sehingga pada pembahasan selanjutnya merupakan pembahasan keseluruhan tulisan ini yang memberikan penjelasan tentang konsep-konsep dasar dan teorema tentang integral dan lingkaran. Semua penulisan sudah didasari pada artikel maupun jurnal yang berkaitan dengan materi penulisan.

## HASIL DAN DISKUSI

### *Ekspansi Laplace*

**Proposisi 3.1 :** Misalkan $M = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline O & D \end{array}\right]$ adalah matriks blok dimana A matriks m × m dengan vektor-vektor kolom pada A bebas lin[illegible] adalah matriks n × n dengan vektor-vektor kolom pada D bebas linier, dan O adalah n × m matriks nol, maka det($M$) = det($A$) det($D$) .

***Bukti:***

Pertama asumsikan matriks B adalah matriks nol. Perhatikan bahwa:

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

dimana $I_n$ dan $I_m$ adalah matriks identitas berukuran n×n dan m×m.

**Berdasarkan teorema 2.1 maka berlaku** :

$$\det\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}\right)$$

1. Akan ditunjukkan det $\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}\right)$ = det ($A$)
2. Akan ditunjukkan det $\left(\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}\right)$ = det ($D$) dengan demikian di peroleh

$$\det\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}\right)$$

$$= \det(A)\det(D) \qquad \ldots(1)$$

Selanjutnya akan ditunjukkan untuk B bukan matriks nol. Karena A dan D merupakan matriks kuadrat maka berdasarkan Definisi Faktorisasi QR.

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} A & B \\ O & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_A R_A & B \\ O & Q_D R_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_A & O \\ O & Q_D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_A & Q_A^T B \\ O & R_D \end{bmatrix}$$

Berdasarkan persamaan (1) diperoleh :

$$\det\begin{bmatrix} Q_A & 0 \\ 0 & Q_D \end{bmatrix} = \det(Q_A)\det(Q_D) \qquad \ldots (2)$$

Karena $R_A$ dan $R_D$ merupakan matriks segitiga atas dan $\begin{bmatrix} R_A & Q_A^T B \\ 0 & R_D \end{bmatrix}$

Juga merupakan matriks segitiga atas, sehingga berdasarkan Teorema 2.3 berlaku:

$$\det\begin{bmatrix} R_A & Q_A^T B \\ 0 & R_D \end{bmatrix} = \det(R_A)\det(R_D) \qquad \ldots(3)$$

Dari persamaan (2) dan (3) di peroleh:

$$\det(M) = \det\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Q_A & 0 \\ 0 & Q_D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_A & Q_A^T B \\ 0 & R_D \end{bmatrix}$$

$$= (\det(Q_A)\det(Q_D))(\det(R_A)\det(R_D))$$

$$= (\det(Q_A)\det(R_A))(\det(Q_D)\det(R_D))$$

$$= \det(Q_A R_A)\det(Q_D R_D)$$

$$= \det(A)\det(D)$$

Dengan demikian terbukti bahwa det($M$) = det($A$) det($D$)

**Contoh 1:**

Diberikan matriks M = $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

Tunjukkan det($M$) = det($A$) det($D$) dengan kolom-1

**Penyelesaian:**

$M$ = $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 4 \end{array}\right]$

det($M$) = $a11C11 + a21C21 + a31C31$

det($M$) = $a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{21}(-1)^{2+1}M_{21} + a_{31}(-1)^{3+1}M_{31}$

$= 1 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$

= (16 – 0)(12 – 0)

= 4

A = $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, maka det($A$) = 4 – 3 = 1

$D$ = [4] , maka det($D$) = 4

det($A$) det($D$) = 4

Sehingga terbukti bahwa:

**det ($M$) =det($A$) det($D$)**

**Contoh 2:**

Diberikan matriks M = $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

Tunjukkan det($M$) = det($A$) det($D$) dengan kolom-1

**Penyelesaian:**

M = $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

det($M$) = $a11C11 + a21C21 + a31C31$

det(*M*) = $a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{21}(-1)^{2+1}M_{21} + a_{31}(-1)^{3+1}M_{31}$

$= 2\begin{vmatrix}3 & 5\\0 & 6\end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix}2 & 4\\0 & 6\end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix}2 & 4\\3 & 5\end{vmatrix}$

= 2 (18) – 1 (12) + 0

= 36 – 12

= 24

A = $\begin{bmatrix}2 & 2\\1 & 3\end{bmatrix}$, maka det(*A*) = (6 - 2) = 4

*D* = [6] , maka det(*D*) = 6

det(*A*) det(*D*) = 24

Sehingga terbukti bahwa:

**det(*M*) =det(*A*) det(*D*)**

**Contoh 3:**

Diberikan matriks M = $\begin{bmatrix}4 & 2 & 3\\1 & 5 & 7\\0 & 0 & 2\end{bmatrix}$

Tunjukkan det(*M*) = det(*A*) det(*D*) dengan baris-1

**Penyelesaian:**

M = $\begin{bmatrix}4 & 2 & 3\\1 & 5 & 7\\0 & 0 & 2\end{bmatrix}$

det(*M*) = $a11C11 + a12C12 + a13C13$

det(*M*) = $a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12} + a_{13}(-1)^{1+3}M_{13}$

$= 4\begin{vmatrix}5 & 7\\0 & 2\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}1 & 7\\0 & 2\end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix}1 & 5\\0 & 0\end{vmatrix}$

= 4 (10) – 2 (2) + 0

= 40 – 4

= 36

A = $\begin{bmatrix}4 & 2\\1 & 5\end{bmatrix}$, maka det(*A*) = (20 - 2) = 18

*D* = [2] , maka det(*D*) = 2

det(*A*) det(*D*) = 36

Sehingga terbukti bahwa:

**det(*M*) =det(*A*) det(*D*)**

## KESIMPULAN

Pada determinan matriks berlaku bahwa: Jika A dan B adalah matriks bujur sangkar yang berukuran sama, maka :

det(*AB*) = det(*A*)det(*B*)

sedangkan untuk matriks blok berlaku:

Untuk *M* = $\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline O & D \end{array}\right]$, Dimana *A*,*D* adalah matriks bujur sangkar dan 0 adalah matriks nol, berlaku:

det(*M*) =det(*A*) det(*D*)

## REFERENSI

Anton, H. 2000. *Dasar-Dasar Aljabar Linear*. Batam Centre : Interaksara.

Bill Jacob. 1990. *Linear Algebra*. 1-W. H. Freeman And Company

Ilhamsyah, Helmi, & Fran, F. (2017). Determinan dan Invers Matriks Blok 2 x 2. *Buletin Ilmiah Math. Stat. Dan Terapannya*, *06*(3), 193–202.

Mac Duffee, C. C. (1933). The Theory of Matrices. In *The Theory of Matrices*. https://doi.org/10.1007/978-3-642-99234-6

Meyer, C. D. (2000). Matrix Analysis and Linear Algebra. *SIAM, Philadelphia*, 1–890. papers2://publication/uuid/BA7FD808-3F1F-4842-B889-FBA0D7526316

Purnama Sari, W., Noliza Bakar, N., & Yanita, Y. (2020). Menghitung Determinan Matriks Blok Menggunakan Ekspansi Laplace Dan Komplemen Schur. *Jurnal Matematika UNAND*, *9*(2), 138.

Kovacs, I. Daniel S. S Dan Susan G. W . 1999. *Determinants Of Block Matrices And Schur's Formula*. The American Mathematical Monthly, Vol. 106, No. 10, Pp.950 – 952: Mathematical Assosiation Of America

Gantmacher, F. R,. 1960. *The Theory Of Matrices*. New York: Chelsea Publishing Company.