Jurnal Pustaka Cendekia Pendidikan
Volume 02, No. 03, Januari-April 2025, pp. 165-171
E-ISSN: 2988-7720
Website: https://pcpendidikan.org/index.php/jpcp

Determinan Matriks Ordo 3×3 dengan Metode Minor dan Kofaktor

Sri Yulianti[1*], Risman Bustaman[2]

[1,2]Program Studi Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Pahlawan Tuanku Tambusai, Jl. Tuanku Tambusai No.23, Bangkinang, Kec. Bangkinang, Kabupaten Kampar, Riau
sriyulianti991022@gmail.com

Abstract

Minor and cofactor methods are general methods that can be used to determine the determinant of matrices. Calculation of the determinant of the matrix with the minor and cofactor methods can be applied to all sizes of square matrices. The determinant of the matrix can be calculated from the minor and the cofactor in one of the rows or columns of the matrix. Before determining the cofactor, we must first determine the submatrix or minor. **Definition 2.3** The minor of a matrix A denoted by M_ij is a matrix of parts of A which is obtained by removing the elements in the ith row and the elements in the jth column. **Definition 2.4** The cofactor of an element of the I-th row and j-column of matrix A is denoted by K_ij= 〖(-1)〗 ^(i+j) M_ij. To determine the determinant of a matrix using the minor and cofactor method, it is sufficient to take only one expansion.
Keywords: Minor and Kofactor, Determinan, Matriks

Abstrak

Metode minor dan kofaktor merupakan metode umum yang dapat digunakan untuk menentukan determinan matriks. Perhitungan determinan matriks dengan metode minor dan kofaktor dapat diterapkan pada semua ukuran matriks bujur sangkar. Determinan matriks dapat dihitung dari minor dan kofaktor pada salah satu baris atau kolom matriks Sebelum menentukan kofaktornya kita harus menentuka submatriksnya atau minornya terlebih dahulu. **Definisi 2.3** Minor suatu matriks A dilambangkan dengan M_{ij} adalah matriks bagian dari A yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemennya pada baris ke i dan elemen-elemen pada kolom ke j. **Definisi 2.4** Kofaktor suatu elemen baris ke-I dan kolom ke-j dari matriks A dilambangkan dengan $K_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. Untuk menentukan determinan matriks dengan metode minor dan kofaktor cukup mengambil satu ekspansi saja.
Kata Kunci: Minor dan Kofaktor, Determinan, Matriks

Corresponding author: Sri Yulianti
Email Address: sriyulianti991022@gmail.com (Jl. Tuanku Tambusai No.23, Bangkinang, Kab. Kampar, Riau)
Received 23 October 2024, Accepted 29 October 2024, Published 04 November 2024

PENDAHULUAN

Salah satu cabang ilmu matematika yang sangat penting adalah Aljabar. Aljabar berasal dari Bahasa Arab yaitu “al-jabr” yang berarti “pertemuan atau hubungan atau penyelesaian”. Penemu Aljabar adalah Abu Abdullah Muhammad Ibn Musa al- Khwarizmi. Ilmu matematika juga dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah dunia nyata yaitu dalam bidang ekonomi, statistik, biologi, ataupun yang lainnya. Untuk cabang matematika yang lain yaitu Analisis, Persamaan Differensial, Geometri, Teori Graph, maupun Matematika Terapan. Dalam Aljabar memiliki pokok permasalahan untuk dikembangkan lebih lanjut lagi, salah satunya yaitu Aljabar Linear. (Sari, 2014)

Matriks adalah susunan skalar elemen-elemen dalam bentuk baris dan kolom. Secara umum, matriks dapat dikatakan sebagai suatu kumpulan angka-angka yang yang juga sering disebut elemen-elemen yang disusun secara teratur menurut baris dan kolom sehingga berbentuk persegi panjang, dengan panjang dan lebarnya ditunjukkan oleh banyaknya kolom dan baris serta dibatasi dengan kurung siku“[ ]” atau kurung biasa“( )” (Alwie et al., 2020)

Salah satu pembahasan matrik adalah mementukan determinan dari suatu matriks. Determinan mempunyai peranan penting dalam menyelesaikan beberapa persoalan dalam matriks dan banyak digunakan dalam ilmu matematika maupun ilmu terapannya. Menghitung nilai determinan suatu matriks terdapat beberapa metode yang dapat digunakan, diantara metode tersebut adalah metode reduksi baris, metode ekspansi kofaktor, serta metode corner. Menentukan nilai determinan matriks berukuran kecil, tidak lah begitu sulit. Namun jika matriksnya berukuran besar, penentuan matriks akan menjadi rumit. Sehingga diperlukan formula yang tepat untuk memudahkan penentuan determinan matriks (Islam et al., 2013)

Determinan adalah satu pokok bahasan yang termasuk dalam Aljabar Linear. Determinan digunakan untuk menyelesaikan permasalahan yang berhubungan dengan Aljabar Linear, antara lain mencari invers matriks, menentukan persamaan karakteristik suatu permasalahan dalam menentukan nilai eigen, dan untuk menyelesaikan persamaan linear. (Sahid, 2015)

Banyak cara yang bisa dilakukan untuk menentukan determinan dari suatu matriks, diantaranya aturan segitiga, aturan Sarrus, metode minor kofaktor, reduksi baris, metode kondensasi Chio, dan metode kondensasi Dodgson. Aturan segitiga hanya bisa digunakan untuk menghitung matriks berukuran 3×3, aturan Sarrus digunakan untuk menghitung determinan matriks berukuran 2 × 2 dan 3 × 3, sedangkan metode minor-kofaktor, reduksi baris, metode kondensasi Chio dan kondensasi Dodgson bisa digunakan untuk menghitung determinan matriks berukuran $n \times n, n \geq 3$. (Norvan et al., 2014)

Perhitungan determinan matriks dengan metode minor dan kofaktor dapat diterapkan pada semua ukuran matriks bujur sangkar. Determinan matriks dapat dihitung dari minor dan kofaktor pada salah satu baris atau kolom matriks (Amir, Mohammad Faizal, 2016)

METODE

Dalam penelitian skripsi ini, metode penelitian yang digunakan adalah penelitian kepustakaan (library research), yang merupakan rangkaian kegiatan yang berkaitan dengan pengumpulan data melalui sumber-sumber pustaka. Menurut Abdul Rahman Sholeh, penelitian kepustakaan adalah metode yang menggunakan fasilitas perpustakaan seperti buku, majalah, dokumen, dan catatan sejarah untuk memperoleh data informasi yang terkait dengan objek penelitian. Metode ini melibatkan eksplorasi dan analisis terhadap literatur yang relevan untuk menggali pemahaman yang mendalam tentang topik penelitian. Dalam penelitian ini, penulis akan mengandalkan sumber-sumber kepustakaan yang berkaitan dengan obyek penelitian untuk memperoleh data dan informasi yang diperlukan.

HASIL DAN DISKUSI

Minor

Misalkan matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ Minor elemen a_{ij} dinotasikan dengan M_{ij} adalah determinan dari matriks baru ordo 2x2 yang diperoleh setelah elemen-elemen pada baris ke-i dan kolom ke-j dihilangkan.

- Misal akan dicari M_{11}, maka kita hilangkan elemen-elemen baris ke-1 dan kolom ke-1 seperti berikut

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} \\ a_{31} & \boldsymbol{a_{32}} & \boldsymbol{a_{33}} \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh $M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Untuk selanjutnya, kita dapat mencari minor yang lain dengan cara yang serupa seperti diatas.

- M_{12} (hilangkan elemen-elemen baris ke-1 dan kolom ke-2)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \boldsymbol{a_{21}} & a_{22} & \boldsymbol{a_{23}} \\ \boldsymbol{a_{31}} & a_{32} & \boldsymbol{a_{33}} \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh $M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$

- M_{13} (hilangkan elemen-elemen baris ke-1 dan kolom ke-3)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & a_{23} \\ \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{32}} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh $M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

- M_{21} (hilangkan elemen-elemen baris ke-2 dan kolom ke-1)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \boldsymbol{a_{32}} & \boldsymbol{a_{33}} \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh $M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

- M_{22} (hilangkan elemen-elemen baris ke-2 dan kolom ke-2)

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & a_{12} & \boldsymbol{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \boldsymbol{a_{31}} & a_{32} & \boldsymbol{a_{33}} \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh $M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$

- M_{23} (hilangkan elemen-elemen baris ke-2 dan kolom ke-3)

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{32}} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh $M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

- M_{31} (hilangkan elemen-elemen baris ke-3 dan kolom ke-1)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} \\ a_{21} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh $M_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$

- M_{32} (hilangkan elemen-elemen baris ke-3 dan kolom ke-2)

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & a_{12} & \boldsymbol{a_{13}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & a_{22} & \boldsymbol{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh $M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$

- M_{33} (hilangkan elemen-elemen baris ke-3 dan kolom ke-3)

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & a_{13} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh $M_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

Kofaktor

Kofaktor elemen a_{ij} dinotasikan dengan K_{ij} adalah hasil kali $(-1)^{i+j}$ dengan minor elemen tersebut. Sehingga didapat rumus untuk mencari kofaktor sebagai berikut.

$$\boldsymbol{K_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}}$$

Keterangan:

K_{ij} merupakan kofaktor elemen a_{ij}

M_{ij} merupakan minor elemen a_{ij}

Dari matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ dapat diperoleh kofaktor-kofaktor sebagai berikut.

$K_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11}$

$K_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12}$

$K_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = M_{13}$

$K_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -M_{21}$

$K_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = M_{22}$

$K_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23}$

$K_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = M_{31}$

$K_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -M_{32}$

$K_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = M_{33}$

Determinan Matriks Dengan Metode Minor Dan Kofaktor

Untuk menentukan determinan matriks dengan metode minor dan kofaktor cukup mengambil satu ekspansi saja. Misalkan ekspansi baris ke-1

Rumus:

Determinan matriks A berdasarkan ekspansi baris ke-1
Det (A) = $\boldsymbol{a_{11}.K_{11} + a_{12}.K_{12} + a_{13}.K_{13}}$

Contoh soal:

1. Tentukan determinan matriks A $= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

Pembahasan:

Dengan menggunakan metode minor dan kofaktor berdasarkan ekspansi baris ke-1

- Menentukan minor baris ke-1

$$\mathrm{M}_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \to |\mathrm{M}_{11}| = (3.4) - \big(0.(-3)\big) = 12$$

$$\mathrm{M}_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ \mathbf{-1} & 3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & -3 & \mathbf{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \to |\mathrm{M}_{12}| = (-1.4) - (0.1) = -4$$

$$\mathrm{M}_{13} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} & 0 \\ \mathbf{2} & \mathbf{-3} & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \to |\mathrm{M}_{13}| = (-1(-3)) - (3.2) = -3$$

- Menentukan kofaktor ekspansi baris ke-1
- $K_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = M_{11} = 12$
- $K_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = -M_{12} = -(-4) = 4$
- $K_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} = M_{13} = -3$

Maka

Det (A) = $a_{11}.K_{11} + a_{12}.K_{12} + a_{13}.K_{13}$

=2.12 + 1.4 + 3.(-3)

=24 + 4 + (-9)

=19

Jadi determinan matrik A adalah 19.

2. Tentukan determinan matriks B $= \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

Pembahasan:

Dengan menggunakan metode minor dan kofaktor berdasarkan ekspansi baris ke-2

- Menentukan $minor$ baris ke-2

$$\mathrm{M}_{21} = \begin{bmatrix} 5 & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ -1 & 3 & -2 \\ 3 & \mathbf{0} & \mathbf{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow |\mathrm{M}_{21}| = (1.4) - (3.0) = 4$$

$$\mathrm{M}_{22} = \begin{bmatrix} \mathbf{5} & 1 & \mathbf{3} \\ -1 & 3 & -2 \\ \mathbf{3} & 0 & \mathbf{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow |\mathrm{M}_{22}| = (5.4) - (3.3) = 11$$

$$\mathrm{M}_{23} = \begin{bmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{1} & 3 \\ -1 & 3 & -2 \\ \mathbf{3} & \mathbf{0} & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow |\mathrm{M}_{23}| = (5.0) - (1.3) = -3$$

- *Menentukan kofaktor ekspansi baris ke-2*
- $K_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -M_{21} = -4$
- $K_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = M_{22} = 11$
- $K_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23} = -(-3) = 3$

Maka

Det (B) = $b_{21}.K_{21} + b_{22}.K_{22} + b_{23}.K_{23}$

= -1.(-4) + 3.11 + (-2).3

= 4 + 33 + (-6)

=31

Jadi determinan matrik B adalah 31

3. Tentukan determinan matriks $\mathrm{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

Pembahasan:

Dengan menggunakan metode minor dan kofaktor berdasarkan ekspansi baris ke-3

- *Menentukan* minor baris ke-3

$$\mathrm{M}_{31} = \begin{bmatrix} 2 & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ -1 & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow |\mathrm{M}_{31}| = (1.0) - (3.3) = -9$$

$$\mathrm{M}_{32} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & 1 & \mathbf{3} \\ \mathbf{-1} & 3 & \mathbf{0} \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow |\mathrm{M}_{32}| = (2.0) - (3(-1)) = 3$$

$$\mathrm{M}_{33} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & 3 \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} & 0 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow |\mathrm{M}_{33}| = (2.3) - (1(-1)) = 7$$

- *Menentukan kofaktor ekspansi baris ke-3*
- $K_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = M_{31} = -9$
- $K_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -M_{32} = -3$
- $K_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = M_{33} = 7$

Maka

Det (C) = $a_{31}.K_{31} + a_{32}.K_{32} + a_{33}.K_{33}$

= 2(-9) + (-3)(-3) + 4.7

= -18 + 9 + 28

=19

Jadi determinan matrik C adalah 19.

KESIMPULAN

Minor suatu matriks A dilambangkan dengan M_{ij} adalah matriks bagian dari A yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemennya pada baris ke I dan elemen-elemen pada kolom ke j. Kofaktor suatu elemen baris ke-I dan kolom ke-j dari matriks A dilambangkan dengan $K_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. Untuk menentukan determinan matriks dengan metode minor dan kofaktor cukup mengambil satu ekspansi saja. Misalkan ekspansi baris ke-1.

Determinan matriks A berdasarkan ekspansi baris ke-1

$$\text{Det (A)} = a_{11}.K_{11} + a_{12}.K_{12} + a_{13}.K_{13}$$

REFERENSI

Alwie, rahayu deny danar dan alvi furwanti, Prasetio, A. B., Andespa, R., Lhokseumawe, P. N., & Pengantar, K. (2020). DETERMINAN MATRIKS. *Jurnal Ekonomi Volume 18, Nomor 1 Maret201*, *2*(1), 41–49.

Amir, Mohammad Faizal, dan B. H. P. (2016). *Buku Ajar Matematika Dasar. Sidoarjo: Umsida Press*.

Islam, U., Maulana, N., Ibrahim, M., Dan, M., & Matematika, P. (2013). *metode sarrus*. *50*, 19760318.

Norvan, B. S., Matematika, J., Sains, F., & Teknologi, D. A. N. (2014). *Penggunaan metode chio dalam menentukan determinan matriks bujur sangkar*.

Sahid. (2015). *metode matriks ordo nxn*.

Sari, S. D. R. (2014). Persamaan Relasi Rekurensi Pada Perhitungan Nilai Determinan Matriks Menggunakan Metode Ekspansi Laplace Dan Metode CHIO. *Http://Eprints.Umpo.Ac.Id*, 1–8.