Jurnal Pustaka Cendekia Pendidikan
Volume 02, No. 03, Januari-April 2025, pp. 157-164
E-ISSN: 2988-7720
Website: https://pcpendidikan.org/index.php/jpcp

Persamaan Diferensial Bernouli

Marliza Syafitri

Program Studi Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Pahlawan Tuanku Tambusai, Jl. Tuanku Tambusai No.23, Bangkinang, Kec. Bangkinang, Kabupaten Kampar, Riau
Marlizasyafitri1925@gmail.com

Abstract

A differential equation is an equation that contains the derivative of one or more of the independent variables. An ordinary differential equation contains only one independent variable, while a partial differential equation contains more than one variable. This article explains how to solve Bernouli's differential equation which is a first order differential equation and can be solved by the integral factor method.

Keywords: Differential Equations, Ordinary Differential Equations, Non-Linear Differential Equations, Bernouli Differential Equations

Abstrak

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan terhadap satu atau lebih dari variabel-variabel bebas. Persamaan diferensial biasa hanya mengandung satu variabel bebas, sedangkan persamaan diferensial parsial mengandung lebih dari satu variabel. Pada artikel ini dijelaskan bagaimana menyelesaikan persamaan diferensial bernouli yang merupakan persamaan diferensial orde satu dan dapat diselesaikan dengan metode faktor integral.

Kata Kunci: Persamaan Diferensial, Persamaan Diferensial Biasa, Persamaan Diferensial Tak Linear, Persamaan Diferensial Bernoulli

Corresponding author: Marliza Syafitri
Email Address: marlizasyafitri1925@gmail.com (Desa Ganting Damai, Kec. Salo, Kab. Kampar, Provinsi Riau)
Received 23 October 2024, Accepted 29 October 2024, Published 04 November 2024

PENDAHULUAN

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan terhadap satu atau lebih dari variabel-variabel bebas (independent variables). Secara umum persamaan diferensial dibagi menjadi dua bagian yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Persamaan diferensial biasa hanya mengandung satu variabel bebas, sedangkan persamaan diferensial parsial mengandung lebih dari satu variabel bebas(Jalil, Abdy, and Sanusi 2014).

Perkembangan persamaan diferensial sangat pesat dalam tahun-tahun berikutnya. Dalam tahun 1694-1697 John Bernoulli menjelaskan ":Metode Pemisahan Variabel" dan membuktikan bahwa persamaan diferensial homogen orde satu dapat direduksi menjadi bentuk persamaan diferensial dengan variabel-variabel yang dapat dipisahkan. Bernoulli menggunakan metode ini terhadap persoalan-persoalan trayektori ortogonal. John Bernoulli dan saudaranya Jacob Bernoulli (yang menemukan Persamaan Diferensial Bernoulli) berhasil menyederhanakan sejumlah besar persamaan diferensial menjadi bentuk yang lebih sederhana yang dapat mereka selesaikan.

Persamaan diferensial Bernoulli menjadi model utama dalam berbagai cabang bidang aplikasi. Persamaan diferensial Bernoulli tersebut dibedakan atas derajat ketaklinierannya (n). Sebagai contoh, persamaan diferensial orde dua Bernoulli (n=2) lazim digunakan untuk memodelkan proses pertumbuhan logistik dalam bidang ilmu hayati dan perilaku chaos. Untuk orde tak linear ketiga (n=3) persamaan diferensial Bernoulli membentuk persamaan Gizbun-Landau atau persamaan quartic yang lazim digunakan dalam menelaah proses terjadinya korosi.

Persamaan diferensial Bernoulli juga merupakan bagian tak linear persamaan diferensial parsial Klein Gordon yang dikenal sangat luas pemakaiannya, diantaranya untuk mempelajari dinamika partikel- partikel elementer dan Stokastik resonan, penelaahan transportasi fluxon, pembangkitan laser squeezed(Los n.d.). Sebagaimana dijelaskan pada pustaka matematika penyelesaian PD Bernoulli selalu dilakukan melalui proses linierisasi sesuai dengan yang dirokemendasikan oleh Jacob Bernoulli. Transformasi dari PD takliner ke dalam PD linier dilakukan dengan menggunakan fungsi transformasi Bernoulli, yang selanjutnya diselesaikan dengan metode penyelesaian PD linier(Rohedi 2007).

METODE

Dalam penelitian ini, metode penelitian yang digunakan adalah penelitian kepustakaan (library research), yang merupakan rangkaian kegiatan yang berkaitan dengan pengumpulan data melalui sumber-sumber pustaka, dan metode search engine yang merupakan pencarian di internet. secara umum tulisan ini memuat latar belakang penulisan. Terdapat gambaran umum dari latar belakang tentang permasalahan yang dibahas. Kemudian disajikan teori-teori yang membantu penulisan dalam menyelesaikan masalah yang dipaparkan sebelumnya, sehingga pada pembahasan selanjutnya merupakan pembahasan keseluruhan tulisan ini yang memberikan penjelasan tentang persamaan diferensial bernouli. Semua penulisan sudah didasari pada artikel maupun jurnal yang berkaitan dengan materi penulisan.

HASIL DAN DISKUSI

Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang menyatakan hubungan fungsi yang tidak di ketahui dan turunan-turunannya.

Definisi 1: Misalkan f(x) mendefinisikan sebuah dari x pada suatu interval I[a,b] dimana a ≤ x ≤ b. Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat derivative dari f(x).

Definisi 2: Orde dari suatu persamaan diferensial adalah orde tertinggi derivative yang termuat dalam persamaan itu. Pada mata kuliah kalkulus, kita telah belajar bagaimana menentukan derivative (turunan) $\frac{dy}{dx} = y' = f'(x)$ dari suatu fungsi $y = f(x)$. Misalkan, jika

$y = 2e^{-x} + \cos 3x$

$y = e^{x} => y = e^{x} . \frac{d(x)}{dx} = e^{x}$

$y = 2e^{x}$ maka,

$$\frac{dy}{dx} = 2 . e^{-x} . \frac{d(-x)}{dx}$$

$= 2\,.\,e^{x}.(-1)$

$= -2e^{-x}$

$y = \sin ax => y = \cos ax$

$y = c0s\ 3x => y = -3\,.\sin 3x$

$\frac{dy}{dx} = -2e^{-x} - 3\sin 3x$ (1)

Atau jika diberikan persamaan dalam bentuk $g(x,y) = c$ dengan c konstanta, kita dapat mendiferensialkan secara implisit untuk memperoleh $\frac{dy}{dx}$. Misalkan dipunyai fungsi implisit

$x^2 + y^2 = 9$ maka akan diperoleh,

$\frac{d(x^{2})}{dx} + \frac{d(y^2)}{dy} = 0$

$\frac{d(x^{2})}{dx} + \frac{d(y^2)}{dy}\,.\,\frac{dy}{dx} = 0$

$2x + 2y\,.\frac{dy}{dx} = 0$

Atau

$2y\,.\frac{dy}{dx} = -2x$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y}$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ (2)

Persamaan (1) dan (2) diatas merupakan contoh Persamaan Diferensial. Penyelesaian suatu persamaan diferensial ialah mencari suatu fungsi yang tidak memuat turunan dan memenuhi persamaan diferensial yang diberikan. Penyelesaian dapat saja dilakukan satu atau beberapa kali integrasi.

Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan diferensial biasa merupakan suatu persamaan diferensial yang hanya mempunyai satu variabel bebas. Jika y(x) adalah suatu fungsi satu variabel, maka x dinamakan variabel bebas dan y dinamakan variabel tak bebas(Resmawan 2018). Contoh persamaan diferensial biasa sebagai berikut:

1. $\frac{dy}{dx} + 4xy = 2e^{2x}$
2. $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 3y = \sin x$
3. $y\,dy - xy\,dx = 0$

Berdasarkan turunan tertinggi yang terdapat di dalam persamaannya, persamaan diferensial biasa dapat dikelompokkan lagi menurut ordenya, yaitu:

1. PDB orde 1, yaitu persamaan diferensial biasa yang turunan tertingginya adalah turunan pertama. Contohnya:

$$x\frac{dy}{dx} - y^2 = 0$$

2. PDB orde 2, yaitu persamaan diferensial biasa yang turunan tertingginya adalah turunan kedua. Contohnya:

$$xy\frac{d^{2y}}{dx^2} - y^2 \sin x = 0$$

3. PDB orde 3, yaitu persamaan diferensial biasa yang turunan tertingginya adalah turunan ketiga. Contohnya:

$$\frac{d^3y}{dx^3} - y\frac{dy}{dx} = 3^{4x} = 0$$

4. dan seterusnya untuk persamaan diferensial biasa dengan orde yang lebih tinggi(Mathematics 2016).

Persamaan Diferensial Linear

Sebuah persamaan diferensial termasuk persamaan diferensial linier jika memenuhi dua hal berikut:

1. Variabel-variabel terikat dan turunannya paling tinggi berpangkat satu dan tidak terdapat fungsi transenden dalam bentuk peubah tak bebas, serta $a_n(x)$ adalah fungsi kontinu.
2. Tidak mengandung bentuk perkalian antara sebuah variabel terikat lainnya, atau turunan yang satu dengan turunan lainnya, atau variabel terikat dengan sebuah turunan.

Jadi istilah linear berkaitan dengan kenyataan bahwa tiap suku dalam persamaan diferensial itu, peubah-peubah $y, y', \ldots., y^n$ berderajat satu atau nol. Persamaan diferensial dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

Maka penyelesain umum persamaan diferensialnya adalah:

$$xe^{\int p(y)dy} = \int e^{\int p(y)dy} q(y)dy + c$$

Catatan: rumus di atas dapat langsung digunakan untuk PD Linear apabila koefisien $\frac{dy}{dx}$ sama dengan satu.

Contoh:

1. Selesaikan PD $\frac{dy}{dx} + 2x\, y = 4x$

Penyelesaian:

P(x) = 2x, maka $\int p(x)dx = \int 2x\, dx = x^2$

Berarti e^{x^2} adalah faktor pengintegral,

$y\, e^{x^2} = \int 4x\, e^{x^2}\, dx + c$

$\quad = 2e^{x^2} + c$

Persamaan Diferensial Bernouli

Bentuk umum persamaan Bernoulli diberikan dalam bentuk:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = q(x)y^n$$

Cara penyelesaian persamaan bernouli yakni dengan membagi kedua ruas persamaan dengan y^n dan dengan memisalkan $v = y^{1-n}$ sehingga:

$$\frac{dv}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

Dan kita dapatkan persamaan:

$$\frac{1}{1-n}\frac{dv}{dx} + Pv = q$$

Atau

$$\frac{dv}{dx} + (1-n)Pv = (1-n)q$$

yang merupakan persamaan diferensial orde satu yang dapat diselesaikan dengan metode faktor integral(Waluya 2006).

Contoh.

Selesaikan $\frac{dy}{dx} + 3xy = xy^2$.

Jawab.

Persamaan di atas ditulis dalam bentuk

$y^{-2}\frac{dy}{dx} + 3xy^{-1} = x$

Misalkan $v = y^{-1}$. Maka $\frac{dv}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{dx}$, sehingga kita mempunyai

$-\frac{dv}{dx} + 3xv = x$, atau $\frac{dv}{dx} - 3xv = -x$.

Dipunyai $p(x) = -3x$, dan $q(x) = -x$. Jadi FI (faktor integral) nya adalah

$e^{\int -3x dx} = e^{-3/2x^2}$.

Dan kita kalikan persamaan diferensial dengan faktor integral tersebut, kita dapatkan persamaan

$\left(ve^{-3/2x^2}\right)' = -xe^{-3/2x^2}$,

Atau

$ve^{-3/2x^2} = \frac{1}{3}\int d(e^{-3/2x^2}) = \frac{1}{3}\, e^{-3/2x^2} + c.$

Jadi

$v = \frac{1}{3} + ce^{3/2x^2}$, dan kita dapatkan solusinya, yakni:

$$y^{-1} = \frac{1}{3} + ce^{3/2x^2}$$

Teorema 8.1 Apabila $n \neq 0{,}1,$ maka dengan transformasi $v = y^{1-n}$ dan $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n}(\frac{dv}{dx})$ persamaan bernouli berubah menjadi PD linear tingkat satu

$$\frac{dv}{dx} + (1-n)P(x)v = (1-n)q(x)$$

Dengan pemyelesaian umum bentuk

$$ve^{(1-n)\int P(X)dx} = (1-n)\int e^{(1-n)\int P(X)dx}\, q(x)dx$$

$$y^{1-n} \cdot e^{(1-n)\int P(X)dx} = (1-n)\int e^{(1-n)\int P(X)dx}\, q(x)dx$$

Contoh:

Selesaikan persamaan $\frac{dy}{dx} + y = xy^3$

dimana $p(x) = 1$ dan $q(x) = x; n = 3$

Penyelesaian:

dengan subtitusi

$$v = y^{1-n}$$
$$= y^{1-3}$$
$$v = y^{-2}$$

Diperoleh

$$\frac{dv}{dx} + (1-n)P(x)v = (1-n)q(x)$$
$$\frac{dv}{dx} + (1-3)1.v = (1-3)x$$
$$\frac{dv}{dx} - 2v = -2x$$

Sehingga penyelesaian umumnya adalah

$$y^{1-n}.e^{(1-n)}\int P(x)dx = (1-n)\int e(1-n)\int P(X)dx.q(x)dx$$
$$y^{-2}.e^{-2(x)} = -2\int e^{-2x}.x\,dx$$

Dimana

$$\int e^{-2x}.x\,dx = x.-\frac{1}{2}e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}$$
$$= -\frac{1}{2}e^{-2x}\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

Sehingga diperoleh

$$y^{-2}.e^{-2(x)} = -2\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right) + c$$
$$y^{-2}.e^{-2(x)} = \left(x + \frac{1}{2}\right)e^{-2x} + c$$

$$y^{-2} = \left(x + \frac{1}{2}\right) + c$$

Jadi penyelesaian umum PD adalah

$$y^{-2} = \left(x + \frac{1}{2}\right) + c$$

Dalam menyelesaikan persamaan diferensial menggunakan persamaan bernouli terdapat beberapa langkah sebagai berikut:

Langkah 1. Reduksilah PD Bernoulli itu dengan tranformasi$v = y^n$ dan $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n}\left(\frac{dv}{dx}\right)$ menghasilkan PD linier orde satu :

$$\frac{dv}{dx} + (1-n)P(x)v = (1-n)q(x)$$

Langkah 2. Gunakan langkah PD linier orde satu untuk menyelesaikannya.

Langkah 3. Gantilah v dengan transformasi semula untuk mendapatkan penyelesaian umum PD Bernoulli.

Contoh 1. Selesaikan persamaan $\frac{dy}{dx} - y = y^2(1 - e^{3x})$

PenyelesaiAn:

$$\frac{dy}{dx} - y = y^2(1 - e^{3x})\,.\frac{1}{y^2}$$

$$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{y} = 1 - e^{3x}$$

Misalkan $z = \frac{1}{y}$

$$\frac{dz}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} = -\frac{dz}{dx}$$

$$-\frac{dz}{dx} - z = 1 - e^{3x}$$

$$\frac{dz}{dx} + z = e^{3x} - 1$$

$$Inxze^x = \int e^{4x} - e^x dx + c \rightarrow ze^x = \frac{1}{4}e^{4x} - e^x + c$$

$$z = \frac{1}{4}e^{3x} - 1 + ce^{-x}$$

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{4}e^{3x} - 1 + ce^{-x}$$

KESIMPULAN

Berdasarkan uraian di atas, dapat di simpulkan bahwa dalam menyelesaikan persamaan diferensial bernouli dapat disimpulkan bahwa : dengan membagi kedua ruas persamaan dengan y^n

dan dengan memisalkan $v = y^{1-n}$ sehingga: $\frac{dv}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$ dan kita dapatkan persamaan: $\frac{1}{1-n}\frac{dv}{dx} + Pv = q$ atau $\frac{dv}{dx} + (1-n)Pv = (1-n)q$ yang merupakan persamaan diferensial orde satu yang dapat diselesaikan dengan metode faktor integral.

REFERENSI

Jalil, Rahmiani, Muhammad Abdy, and Wahidah Sanusi. 2014. "Penyelesaian Persamaan Diferensial Bernoulli Tak Linear Dengan Metode Transformasi Diferensial."

Los, Unidad Metodología D E Conocimiento D E. "Persamaan Diferensial Bernouli." : 1–5.

Mathematics, Applied. 2016. "Persamaan Diferensial Biasa." : 1–23.

Resmawan. 2018. "Persamaan Diferensial Biasa." *Persamaan Diferensian Biasa Orde n KoeÖsien Konstan* (November): 28.

Rohedi, Ali Yunus. 2007. "Penerapan Skema Modulasi Stabil Pada Penyelesaian Persamaan Diferensial Bernoulli." *Jurnal Fisika dan Aplikasinya* 3(1): 070101.

Waluya, Budi. 2006. "Daftar Isi." *Buku Ajar Persamaan Diferensial*: 1–90.