Jurnal Pustaka Cendekia Pendidikan
Volume 02, No. 03, Januari-April 2025, pp. 147-151
E-ISSN: 2988-7720
Website: https://pcpendidikan.org/index.php/jpcp

Teorema Kecil Fermat *(Fermat's Little Theorem)*

Dini Wahyuningsih

Program Studi Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Pahlawan Tuanku Tambusai,
Jl. Tuanku Tambusai No.23, Bangkinang, Kec. Bangkinang, Kabupaten Kampar, Riau
diniwahyuningsih121101@gmail.com

Abstract

Fermat's Little Theorem is a fundamental theorem from the realm of number theory. Even by using this theorem, we can derive Euler's Theorem with the help of the properties of the Euler function φ, even though actually Fermat's Little Theorem is a special case of Euler's Theorem. Then Fermat's little theorem (Fermat's little theorem) is a form of Number Theory, which is a branch of Mathematics that discusses various things about numbers. In number theory there is a chapter that discusses three mathematicians who were very useful in the development of number theory. Fermat's theorem is not a grand theorem, in 1622 Pierre de Fermat made a theorem that made him very famous, which is now known as Fermat's little theorem. Fermat's little theorem (Fermat's little theorem) to determine the primeness of a number. In general, Fermat's little theorem is used to find the remainder of division of a number by a prime number.
Keywords: Fermat's Little Theorem, Number Theory, Prime Numbers

Abstrak

Fermat's Little Theorem ini merupakan teorema yang mendasar dari ranah ilmu teori bilangan. Bahkan dengan menggunakan teorema ini, kita dapat menurunkan *Euler's Theorem* dengan bantuan sifat dari fungsi Euler φ, walaupun sebenarnya *Fermat's Little Theorem* ini merupakan kasus khusus dari *Euler's Theorem*. Kemudian Teorema kecil Fermat *(Fermat's little theorem)* merupakan bentuk dari Teori Bilangan yaitu salah satu cabang Pelajaran Matematika yang membahas tentang berbagai hal tentang bilangan. Dalam teori bilangan terdapat satu bab yang membahas tentang tiga orang ilmuan matematika yang sangat berguna dalam perkembangan teori bilangan. Teorema Fermat bukan suatu teorema besar, pada tahun 1622 Pierre de Fermat telah membuat suatu teorema yang membuat dirinya sangat terkenal, yang saat ini dikenal dengan teorema kecil Fermat. Teorema kecil Fermat *(Fermat's little theorem)* untuk menentukan keprimaan suatu bilangan. Secara umum teorema kecil fermat digunakan untuk mencari sisa pembagian suatu bilangan oleh suatu bilangan prima.
Kata Kunci: Teorema Kecil Fermat, Teori Bilangan, Bilangan Prima

Copyright (c) 2024 Dini Wahyuningsih

Corresponding author: Dini Wahyuningsih
Email Address: diniwahyuningsih121101@gmail.com (Desa Rimba Jaya, Tapung Hulu, Kab. Kampar, Riau)
Received 23 October 2024, Accepted 29 October 2024, Published 04 November 2024

PENDAHULUAN

Teorema Fermat bukan suatu teorema besar, pada tahun 1622 Pierre de Fermat telah membuat suatu teorema yang membuat dirinya sangat terkenal, yang saat ini dikenal dengan teorema kecil Fermat. Teorema kecil Fermat *(Fermat's little theorem)* adalah dasar untuk menentukan keprimaan suatu bilanga. Namanya diambil dari matematikawan Perancis de fermat, yang menuliskannya pada tahun 1640. Teorema ini disebut "Teorema Kecil" untuk membedakan "Teorema Terakhir Fermat". Secara umum teorema kecil fermat digunakan untuk mencari sisa pembagian suatu bilangan oleh suatu bilangan prima(Hayadi, 2018).

Teori Bilangan adalah salah satu cabang Pelajaran Matematika yang membahas tentang berbagai hal tentang bilangan. Dalam teori bilangan terdapat satu baba yang membahas tentang tiga orang ilmuan matematika yang sangat berguna dalam perkembangan teori bilangan. Ilmuan ketiga itu adalah Fermat, Wilson, dan Euler yang memiliki teorema teorema yang seharusnya dapat dipahamidan dibuktikan oleh Mahasiswa Pendididkan Matematika. Untuk menyikapi hal tersebut kami sebagai penyusun makalah berusaha menyajikan makalah ini dalam bentuk catatan catata sederhana yang insyaallah akan membuat kita lebih mampu menambah wawasan kita mengenai Teorema Fermat, Wilson, dan Euler(Munir, n.d.).

Bilangan prima adalah bilangan bulat yang lebih besar dari 1 dan hanya memiliki dua faktor pembagi yang berbeda, yaitu 1 dan bilangan itu sendiri. Artinya bilangan prima adalah bilangan yang hanya dapat dibagi oleh dua bilangan yaitu bilangan 1 dan dirinya sendiri, tanpa bisa dibagi oleh bilangan lainJadi bilangan prima Misal p adalah suatu bilangan bulat positif lebih dari 1 yang hanya mempunyai pembagi 1 dan p, maka p disebut bilangan prima. Jika suatu bilangan bulat q lebih dari 1 dan bukan bilangan prima maka q disebut bilangan komposit(*Teori Bilangan*, n.d.).

METODE

Secara umum tulisan ini memuat latar belakang penulisan. Terdapat gambaran umum dari latar belakang tentang permasalahan yang dibahas. Kemudian disajikan teori-teori yang membantu penulisan dalam menyelesaikan masalah yang dipaparkan sebelumnya, sehingga pada pembahasan selanjutnya merupakan pembahasan keseluruhan tulisan ini yang memberikan penjelasan tentang konsep-konsep dasar dan teorema tentang integral dan lingkaran. Semua penulisan sudah didasari pada artikel maupun jurnal yang berkaitan dengan materi penulisan.

HASIL DAN DISKUSI

Bilangan Prima

Defenisi 2.1

Misal p adalah suatu bilangan bulat positif lebih dari 1 yang hanya mempunyai pembagi 1 dan p, maka p disebut bilangan prima. Jika suatu bilangan bulat q lebih dari 1 dan bukan bilangan prima maka q disebut bilangan komposit.

Contoh bilangan prima

2, 3 dan 5 adalah bilangan prima karena:

2 hanya mempunyai pembagi 1 dan 2

3 hanya mempunyai pembagi 1 dan 3

5 hanya mempunyai pembagi 1 dan 5

Contoh bilangan komposit

4, 6 dan 15 adalah bilangan komposit karena:

Pembagi 4 adalah 1, 2 dan 4 (tidak hanya 1 dan 4

Pembagi 6 juga bukan hanya 1 dan 6

Pembagi 15 juga bukan hanya 1 dan 15

***Teorema Kecil Fermat* (Fermat’s Little Theorem)**

Teorema kecil Fermat *(Fermat's little theorem)* adalah dasar untuk menentuka keprimaan suatu bilangan. Namanya diambil dari matematikawan Perancis de fermat, yang menuliskannya pada tahun 1640. Teorema ini disebut "Teorema Kecil" untuk membedakan "Teorema Terakhir Fermat". Secara umum teorema kecil fermat digunakan untuk mencari sisa pembagian suatu bilangan oleh suatu bilangan prima(Teorema & Dan, 2014).

Defenisi 2.2

Jika p bilangan prima dan a adalah bilangan bulat maka (a,p) = 1

Teorema 2.1

Jika (a,m) maka residu-residu terkecil modulo m dari barisan : a, 2a, 3a ...(m-1) a adalah suatu bilangan permutasi dari 1,2,3 ...(m-1)

Bukti:

Perhatikan barisan bilangan : a, 2a, 3a ...(m-1) a………(1) Bilangan pada barisan ini tidak ada satupun yang kongruen modulo m dengan 0, selanjutnya kita harus membuktikan bahwa bilangan suku –suku pada barisan (1) masing-masing kongruen modulo m dengan tepat satu dari 1, 2, 3,…, (m-1). Andaikan ada dua suku dari barisan (1) yang kongruen modulo m, misalnya: ra ≡ sa (mod m) dengan $1 \leq r < s < m$ Karena (a,m) = 1 maka kita dapat menghilangkan a dari kongruen itu, sehingga diperoleh r ≡ s(mod m) tetapi karena ra dan sa adalah suku-suku dari barisan (1) maka r dan s adalah residu-residu terkecil modulo m, sehingga r = s. hal itu kontradiksi dengan pengandaiannya bahwa $1 \leq r < s < m$, maka pengandaian berikut tidak benar Jika tidak ada dua suku dari barisan (1) yang kongruen modulo m. ini berarti bahwa suku 1, 2, 2,…, (m-1)…….terbukti.

Teorema 2.2

Jika p suatu bilangan prima dan a adalah bilangan bulat yang tidak habis dibagi dengan p,(a,p) = 1 maka $a^{p-1} \equiv 1 \ (mod\ p)$

Bukti:

Ambil sem**b**arang bilangan prima p dan bilangan bulat a sedemikian,

(a,p) = 1, maka residu-residu kecil modulo p dari a, 2a, 3a ... (*p-1*) adalah suatu permutasi dari 1, 2, 3, (*p-1*) ... sehingga hasil kalinya akan kongruen modulo p juga yaitu:

a, 2a, 3a ... (*p-1*) $\equiv 1, 2, 3, \dots (p-1)\ (mod\ p)$

$a^{p^{-1}}\ (1, 2, 3, \dots (p-1)! \equiv (p-1)!\ \ (mod\ p)$

$a^{p^{-1}}\ .\ ((p-1)! \equiv (p-1)! \qquad (mod\ p)$

Karena p dan $(p-1)!$ Saling prima maka kita dapat menghilangkan $(p-1)!$

Dari kekongruenan terakhir ini, sehingga diperoleh

$a^{p-1} \equiv 1\ mod\ p$…..Terbukti

Teorema 2.3

Jika p suatu bilangan prima, maka $a^p \equiv a\ (\ d\ p)$ untuk setiap bilangan bulat a.

Bukti:

Andai sembarang bilangan prima p dan sembarang bilangan a, maka

(a,p) – 1 atau *(a,p)* = p. apakah ada kemungkinan lain antara FPB dari a dan p?

Jika *(a,p)* = 1, maka menurut teorema 2.2 di peroleh bahwa $a^{p-1} \equiv 1\ (mod\ p)$, selanjutnya jika kedua ruas dikalikan a, maka diperoleh $a^p \equiv a\ (\ mod\ p)$.

Jika *(a,p)* = p maka p $|$ a, sehingga $a = a\ \ (\ mod\ p)$ dan $a^p \equiv a\ (\ mod\ p)$.

Jadi $a^p \equiv a\ (\ d\ p)$.

Perbedaan teorema kecil fermat dengan teorema sebelumnya (teorema terakhir fermat) yaitu teorema kecil fermat membahas tentang ke primaan suatu bilangan sedangkan teorema terakhir fermat membahas tentang bilangan bulat bukan nol x,y dan z yang memenuhi persamaan $x^n + y^n = z^n$ dengan n > 2. Namun tidak ada tiga bilangan bulat positif x, y, dan z yang dapat memenuhi persamaan tersebut ketika nilai n adalah bilangan bulat positif > 2.

Defenisi 3.1

Misalkan a suatu bilangan bulat positif dan p suatu bilangan prima. Maka berlaku $a^p \equiv a\ (mod\ p)$. Untuk FPB (*a,p)* = 1, berlaku $a^{p-1} \equiv 1\ mod\ p$

Pembuktian Teorema Kecil Fermat

Jika p suatu bilangan prima, maka untuk suatu bilangan bulat positif *a*, berlaku:

$a^p \equiv a\ (\ mod\ p)$. Lebih lanjut, jika a dan p saling relatif prima, maka berlaku $a^{p-1} \equiv 1\ mod\ p$

Bukti:

Misalkan a adalah bilangan bulat positif a yang relatif prima dengan p. perhatikan bahwa bilangan a, 2a, 3a, …, (*p-1)* a masing-masing memiliki sisa yang berbeda dalam modulo p. akibatnya diperoleh

$$a^{p-1} \equiv 1\ mod\ p$$

Contoh

1. Hitunglah $5^{12}\ (\ mod\ 7)$

   Karna 7 adalah bilangan prima maka berdasarkan defenisi 3.1 ($a^{p-1} \equiv 1\ mod\ p$) diperoleh

   $5^{7-1} \equiv 1\ mod\ 7$

   $5^6 \equiv 1\ mod\ 7$

   $5^{12} \equiv 5^{6.2} (mod\ 7)$

   $\equiv 1.\ 5^2\ (mod\ 7)$

   $\equiv 1.\ 25\ \ (mod\ 7)$

   $\equiv 25\ \ (mod\ 7)$

   $\equiv 4\ (mod\ 7)$

2. Hitunglah $6^{402}\ \ (\ mod\ 11)$

   Karna 11 adalah bilangan prima maka $a^{p^{-1}} \equiv 1\ mod$ p

   $6^{11-1} \equiv 1\ mod\ 11$

$6^{10} \equiv 1 \; mod \; 11$

402 = 10.40 + 2

$6^{402} \equiv 6^{10.40}. \; 6^2 (mod \; 11)$

$\equiv 1 \; . \; 6^2 (mod \; 11)$

$\equiv 36 \; (mod \; 11)$

$\equiv 3 (mod \; 11)$

KESIMPULAN

Teorema kecil Fermat *(Fermat's little theorem)* Jika p suatu bilangan prima, maka untuk suatu bilangan bulat positif a, berlaku $a^p \equiv a \; (\; od \; p)$ Lebih lanjut, jika a dan p saling relatif prima, maka berlaku $a^{p^{-1}} \equiv 1 \; (\; mod \; p)$.

REFERENSI

Hayadi, B. H. (2018). Bab 2 Landasan Teori. *Aplikasi Dan Analisis Literatur Fasilkom UI*, *m*(1998), 7–34.

Munir, R. (n.d.). *Teori Bilangan*. *Bagian 2*.

Teorema, B. A. B., & Dan, F. (2014). *Teorema Fermat dan Teorema Fermat Kecil(1643)*.

Teori Bilangan. (n.d.).