Jurnal Pustaka Cendekia Pendidikan
Volume 02, No. 02, September-Desember 2024, pp. 137-142
E-ISSN: 2988-7720
Website: https://pcpendidikan.org/index.php/jpcp

Integral Fungsi Hiperbolik

Mutiara Nursandi

Program Studi Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Pahlawan Tuanku Tambusai, Jl. Tuanku Tambusai No.23, Bangkinang, Kec. Bangkinang, Kabupaten Kampar, Riau
mutiaranursandi437@gmail.com

Abstract

Certain combinations of exponential functions will form hyperbolic functions such as hyperbolic sine (sinh), hyperbolic cosine (cosh), hyperbolic tangent (tanh), hyperbolic secant (sech), hyperbolic cosecant (csch) and hyperbolic cotangent (coth). An exponential function is a function usually denoted in the forme^x where e is an irrational real number with value $e = 2{,}7183 \ldots$ The integral of a hyperbolic function is the anti-derivative of a hyperbolic function like $\int \sinh x\, dx = \cosh x + C$, $\int cosh\ x\ dx = sinh\ x + C$ $\int sech^2\ x\ dx = \tanh x + C$.
Keywords: Exponential function, Hyperbolic function, Hyperbolic function integral

Abstrak

Kombinasi tertentu dari fungsi eksponensial akan membentuk fungsi hiperbolik seperti sinus hiperbolik $(sinh)$, cosinus hiperbolik $(cosh)$, tangen hiperbolik $(\tanh)$, secan hiperbolik (sech), cosecan hiperbolik (csch) dan cotangen hiperbolik $(\coth)$. Fungsi eksponensial adalah fungsi yang biasa dinotasikan dalam bentuk e^x dimana e adalah bilangan real irasional dengan nilai $e = 2{,}7183$ ... Integral fungsi hiperbolik adalah anti turunan dari fungsi hiperbolik seperti $\int \sinh x\, dx = \cosh x + C$, $\int cosh\ x\ dx = sinh\ x + C$ dan $\int sech^2\ x\ dx = \tanh x + C$.
Kata Kunci: Fungsi Eksponensial, Fungsi Hiperbolik, Integral Fungsi Hiperbolik

Corresponding author: Mutiara Nursandi
Email Address: mutiaranursandi437@gmail.com (Jl. Tuanku Tambusai No.23, Bangkinang, Kab.Kampar, Riau)
Received 19 October 2024, Accepted 25 October 2024, Published 31 October 2024

PENDAHULUAN

Keampuhan kalkulus baik berupa turunan maupun integral tak perlu diragukan lagi sebagai sarana ampuh untuk memecahkan berbagai permasalahan yang dihadapi dalam kehidupan nyata. Fungsi logaritma dan fungsi eksponensial sebagai bagian dari kalkulus telah memberi pengaruh yang besar dalam perkembangan kalkulus. Dalam persoalan matematika terapan banyak sekali digunakan kombinasi-kombinasi tertentu fungsi eksponensial e^x dan e^{-x} sehingga kombinasi fungsi-fungsi tersebut diberi nama khusus, salah satunya adalah fungsi hiperbolik. Namun bagaimana membangun fungsi hiperbolik merupakan suatu permasalahan yang menarik untuk dikaji secara mendalam untuk kemudian ditemukan solusinya. (Susanto, 2019).

Selain fungsi-fungsi aljabar yang didefenisikan menggunakan operasi aritmatika, pangkat dan akar-akar, terdapat pula transenden dari suatu fungsi. Satu kelompok dari fungsi transenden adalah fungsi hiperbolik yang muncul dalam aplikasi ilmiah dan matematika (meskipun jarang apabila dibandingkan fungsi aljabar dan trigonometri). Setiap fungsi hiperbolik berkorespondensi dengan satu fungsi trigonometri yaitu fungsi $\sin x$ berkorespondensi dengan $\sinh x$, fungsi $\cos x$ berkorespondensi dengan $\cosh x$, fungsi $\tan x$ berkorespondensi dengan $\tanh x$ dan seterusnya. Fungsi-fungsi hiperbolik didefinisikan menggunakan fungsi-fungsi eksponensial. Trigonometri hiperbolik seperti $\sinh x, \cosh x, \tanh x$ merupakan kombinasi dari fungsi-fungsi eksponensial e^x dan e^{-x}. (Sakidin, 2023).

METODE

Secara umum tulisan ini memuat latar belakang penulisan. Terdapat gambaran umum dari latar belakang tentang permasalahan yang dibahas. Kemudian disajikan teori-teori yang membantu penulisan dalam menyelesaikan masalah yang dipaparkan sebelumnya, sehingga pada pembahasan selanjutnya merupakan pembahasan keseluruhan tulisan ini yang memberikan penjelasan tentang cara menjabarkan bentuk integral pada fungsi hiperbolik.

HASIL DAN DISKUSI

Persamaan pada Fungsi Hiperbolik

Kombinasi tertentu dari fungsi eksponensial akan membentuk fungsi hiperbolik seperti sinus hiperbolik $(sinh)$, cosinus hiperbolik $(cosh)$, tangen hiperbolik $(\tanh)$, secan hiperbolik (sech), cosecan hiperbolik (csch) dan cotangen hiperbolik $(\coth)$. (Nursalim, 2022).

Untuk variabel kompleks z didefinisikan fungsi hiperbolik :

1. $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$
2. $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$
3. $\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}$
4. $\coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}$
5. $\text{sech}\, z = \frac{1}{\cosh z}$
6. $\text{csch}\, z = \frac{1}{\sinh z}$

Teorema 1.1 :

Jika $z \in C$, maka berlaku $cosh^2 z - sinh^2 z = 1$

Pembuktian :

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$cosh^2 z - sinh^2 z = 1$$

$$cosh^2 z = \left(\frac{1}{2}(e^z + e^{-z})\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}(e^{2z} + 2e^z . e^{-z} + e^{-2z})$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{2z} + 2e^{z+(-z)} + e^{-2z}\right)$$

$= \frac{1}{4}(e^{2z} + 2e^{0} + e^{-2z})$

$= \frac{1}{4}(e^{2z} + 2.1 + e^{-2z})$

$= \frac{1}{4}(e^{2z} + 2 + e^{-2z})$

$sinh^2 z = \left(\frac{1}{2}(e^{z} - e^{-z})\right)^2$

$= \frac{1}{4}(e^{2z} - 2e^{z}e^{-z} + e^{-2z})$

$= \frac{1}{4}\left(e^{2z} - 2e^{z+(-z)} + e^{-2z}\right)$

$= \frac{1}{4}(e^{2z} - 2e^{0} + e^{-2z})$

$= \frac{1}{4}(e^{2z} - 2.1 + e^{-2z})$

$= \frac{1}{4}(e^{2z} - 2 + e^{-2z})$

Maka :

$cosh^2 z - sinh^2 z = \frac{1}{4}(e^{2z} + 2 + e^{-2z}) - \frac{1}{4}(e^{2z} - 2 + e^{-2z})$

$= \frac{1}{4}((e^{2z} + 2 + e^{-2z}) - (e^{2z} - 2 + e^{-2z}))$

$= \frac{1}{4}(4)$

$= 1$

Integral Fungsi Hiperbolik

Sebuah fungsi memiliki bentuk umum $f(x) = 2x^3$ dan memiliki turunan $f'(x) = 6x^2$. Jadi turunan dari fungsi $f(x) = 2x^3$ adalah $f'(x) = 6x^2$. Menentukan fungsi $f(x)$ dari $f'(x)$ berarti menentukan anti turunan dari $f'(x)$. Sehingga integral merupakan anti turunan (anti diferensial). (Yudianto, 2020). Jika $F(x)$ anti turunan dari $f(x)$ maka $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ dengan C adalah konstanta. (Isna, Selly, 2014).

Teorema 2.1 :

1. $\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$

Pembuktian :

$\int \sinh x\,dx$

$= \int \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\,dx$

$= \frac{1}{2}\int (e^{x} - e^{-x})\,dx$

$= \frac{1}{2}\left(\int e^x \, dx - \int e^{-x} dx\right)$

$= \frac{1}{2}\left(e^x - (e^{-x})\right) + C$

$= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) + C$

$= \frac{e^x + e^{-x}}{2} + C$

$= \cosh x + C$

2. $\int sech^2\, x \, dx = \tanh x + C$

Pembuktian :

$\int sech^2 x \, dx$

$= \tanh x + C$

$= \frac{d}{dx} \tanh x$

$= \frac{d}{dx} \frac{\sinh x}{\cosh x}$

Misalkan :

$u(x) = \sinh x$

$u'(x) = \cosh x$

$v(x) = \cosh x$

$v'(x) = -\sinh x$

$\frac{d}{dx}\frac{u}{v} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$= \frac{\cosh x . \cosh x - \sinh x \, (-sinhx)}{cosh^2 x}$

$= \frac{1}{cosh^2 x}$

$= sech^2 x$

Contoh :

1. $\int \sinh(1 + 4x) \, dx$

Penyelesaian :

Misalkan :

$u = 1 + 4x$

$\frac{du}{dx} = 4 \Rightarrow dx = \frac{1}{4} du$

$\int \sinh(1 + 4x) \, dx$

$= \int \sinh u \, . \frac{1}{4} du$

$= \frac{1}{4} \int \sinh u \, du$

$= \frac{1}{4} \cosh u + C$

$= \frac{1}{4} \cosh(1 + 4x) + C$

2. $\int \cosh(2x - 3) \, dx$

Penyelesaian :

Misalkan :

$u = 2x - 3$

$\frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{1}{2} du$

$\int \cosh(2x - 3) \, dx$

$= \int \cosh u \, . \frac{1}{2} du$

$= \frac{1}{2} \cosh u \, du$

$= \frac{1}{2} \sinh u + C$

$= \frac{1}{2} \sinh(2x - 3) + C$

3. $\int \sinh x \, cosh^2 x \, dx$

Penyelesaian :

Misalkan :

$u = \cosh x$

$\frac{du}{dx} = \sinh x \Rightarrow du = \sinh x \, dx$

$\int \sinh x \, cosh^2 x \, dx$

$= \int u^2 \, du$

$= \frac{1}{3} u^3 + C$

$= \frac{1}{3} cosh^3 u + C$

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang telah dikemukakan maka disimpulkan bahwa integral merupakan anti turunan (anti diferensial). Jika $F(x)$ anti turunan dari $f(x)$ maka $\int f(x) \, dx = F(x) +$

C dengan C adalah konstanta. Rumus integral pada fungsi hiperbolik yaitu $\int \sinh x \, dx = \cosh x + C$ dan $\int sech^2 \, x \, dx = \tanh x + C$

REFERENSI

Isna, Selly, I. (2014). *Integral*. 27.

Nursalim, R. (2022). *Kalkulus Fungsi Hiperbolik*. 1–19.

Sakidin, S. (2023). *Trigonometri*.

Susanto, A. (2019). Fungsi Hiperbolik dan Inversnya. *Mathematic. My. Id*.

Yudianto, E. (2020). Integral. *Digital Repository Universitas Jember*, 1–38.