Jurnal Pustaka Cendekia Pendidikan
Volume 02, No. 02, September-Desember 2024, pp. 132-136
E-ISSN: 2988-7720
Website: https://pcpendidikan.org/index.php/jpcp

Sistem Persamaan Linear dengan Metode *Gauss Seidel*

Bela Amelia

Program Studi Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Pahlawan Tuanku Tambusai, Jl. Tuanku Tambusai No.23, Bangkinang, Kec. Bangkinang, Kabupaten Kampar, Riau
belaamelia1611@gmail.com

Abstract

A linear equation is an algebraic equation in which each term contains a constant or multiplication of a constant with a single variable. Systems of linear equations arise directly from real problems that require a solution process. Systems of linear equations can be solved by two methods. The first method is direct, which is usually called the exact method. These methods include inverse, elimination, substitution, LU decomposition, Cholesky decomposition, QR decomposition, Crout decomposition, and ST decomposition. The second method is usually known as the indirect method or iteration method, including the Jacobi iteration method, the Newton method, and the Gauss Seidel method. The Gauss-Seidel method is a method of solving simultaneous equations through an iteration process so that the actual value is obtained by using the initial value in the next process using a previously known value.
Keywords: Linear Equations, Linear Equation System, Gauss Seidel Method

Abstrak

Persamaan linear adalah sebuah persamaan aljabar yang tiap sukunya mengandung konstanta atau perkalian konstanta dengan variable tunggal.. Sistem persamaan linier muncul secara langsung dari masalah-masalah yang nyata sehingga membutuhkan proses penyelesaian. Sistem persamaan linier dapat diselesaikan dengan dua metode. Metode pertama yaitu secara langsung, yang biasanya disebut metode eksak. Metode tersebut diantaranya metode invers, eliminasi, subtitusi, dekomposisi *LU*, dekomposisi Cholesky, dekomposisi *QR*, dekomposisi *Crout*, dan dekomposisi *ST*. Metode kedua biasanya dikenal dengan metode tidak langsung atau metode iterasi, diantaranya metode iterasi Jacobi, metode Newton, dan metode Gauss Seidel. Metode Gauss-Seidel adalah metode penyelesaian persamaan serentak melalui proses iterasi sehingga diperoleh nilai sesungguhnya dengan menggunakan nilai awal pada proses selanjutnya menggunakan nilai yang sudah diketahui sebelumnya.
Kata Kunci: Persamaan Linear, Sistem Persamaan Linear, Metode Gauss Seidel

✉ Corresponding author: Bela Amelia
Email Address: belaamelia1611@gmail.com (Jl. Tuanku Tambusai No.23, Bangkinang, Kab.Kampar, Riau)
Received 19 October 2024, Accepted 25 October 2024, Published 31 October 2024

PENDAHULUAN

Sistem persamaan linear merupakan salah satu bagian dari aljabar linear yang sering dipelajari dalam ilmu matematika. Sistem persamaan linier muncul secara langsung dari masalah-masalah yang nyata sehingga membutuhkan proses penyelesaian.

Sistem persamaan linier dapat diselesaikan dengan dua metode.Metode pertama yaitu secara langsung, yang biasanya disebut metode eksak. Metode tersebut diantaranya metode invers, eliminasi, subtitusi, dekomposisi *LU*, dekomposisi Cholesky, dekomposisi *QR*, dekomposisi *Crout*, dan dekomposisi *ST*. Metode kedua biasanya dikenal dengan metode tidak langsung atau metode iterasi, diantaranya metode iterasi Jacobi, metode Newton, dan metode Gauss Seidel.

Metode Gauss-Seidel adalah metode penyelesaian persamaan serentak melalui proses iterasi sehingga diperoleh nilai sesungguhnya dengan menggunakan nilai awal pada proses selanjutnya menggunakan nilai yang sudah diketahui sebelumnya. Iterasi Gauss-Seidel mempunyai kelebihan dan kekurangan sama seperti iterasi Jacobi. Iterasi Gauss-Seidel proses iterasinya lebih cepat dari pada metode Jacobi. Metode Gauss-Seidel dikenalkan oleh Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) dan Philipp Ludwig von Seidel (1821-1896).

Metode Gaus-Seidel digunakan untuk menyelesaikan Sistem Persamaan Linear (SPL) berukuran besar dan proporsi koefisien nolnya besar, seperti pada sistem yang banyak ditemukan dalam sistem persamaan differensial.Metode iterasi gaus-seidel dikembangkan dari gagasan metode iterasi ini lebih efisien dibandingkan dengan metode langsung. Serta dalam hal penggunaan metode gauss-seidel waktu juga lebih efisien,menyelesaikan sistem persamaan linear proses iterasi dihentikan bila selisih nilai xi (i=1 s/d n) dengan nilai xi pada iterasi sebelumnya kurang dari nilai tolerasi error yang ditentukan(Yuliana, n.d.).

METODE

Dalam penelitian ini, metode penelitian yang digunakan adalah penelitian kepustakaan (library research), yang merupakan rangkaian kegiatan yang berkaitan dengan pengumpulan data melalui sumber-sumber pustaka, dan metode search engine yang merupakan pencarian di internet. secara umum tulisan ini memuat latar belakang penulisan. Terdapat gambaran umum dari latar belakang tentang permasalahan yang dibahas. Kemudian disajikan teori-teori yang membantu penulisan dalam menyelesaikan masalah yang dipaparkan sebelumnya, sehingga pada pembahasan selanjutnya merupakan pembahasan keseluruhan tulisan ini yang memberikan penjelasan tentang sistem persamaan linear dengan metode gauss seidel. Semua penulisan sudah didasari pada artikel maupun jurnal yang berkaitan dengan materi penulisan.

HASIL DAN DISKUSI

Sistem Persamaan Liner

Sistem adalah sekumpulan elemen, himpunan dari suatu unsure, komponen fungsional yang saling berhubungan dan berinteraksi satu sama lain untuk mencapai tujuan yang diharapkan. Persamaan adalah suatu pernyataan matematika dalam bentuk symbol (=) yang menyatakan bahwa dua hal adalah persis sama. (Sahid, 2015)

Persamaan linear adalah sebuah persamaan aljabar yang tiap sukunya mengandung konstanta atau perkalian konstanta dengan variable tunggal. (Sahid, 2015)

Definisi 2.1.1

suatu persamaan dalam n variable $x_1, x_{2,} \cdots x_n$ dikatakan linear apabila dapat dituliskan dalam bentuk $C_1x_1, C_2x_2, \cdots C_nx_n = k$ dimana $C_1, C_{2,} \cdots C_n$ dan k adalah konstanta real

Definisi 2.1.2

Sistem persamaan linear yang terdiri dari m persamaan dan n variable adalah suatu system persamaan yang dapat ditulis dalam bentuk

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

Dimana a_{ij} dan b_i , i=1,2,….,n; j=1,2,….,m adalah konstanta real, sedangkan x_i , i=1,2,…,n merupakan variable atau peubah.

Teorema 2.1.1

System persamaan linear mempunyai penyelesaian trival, jika matriks koefisien A berukuran $n \times n$ ekuivalen baris dengan matriks identitas

Pembuktian:

Menyelesaikan system persamaan linear yang hanya mempunyai penyelesaian trival (penyelesaian tunggal). Hal ini terjadi apabila matriks koefisien dari system persamaan linear ekuivalen dengan matriks identitas,

$$l_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Sehingga system persamaan linear yang dihasilkan berbentuk

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ &\vdots \\ x_n &= 0 \end{aligned}$$

Dan penyelesaian dari system ini adalah trival.

Sistem Persamaan Linear Dengan Metode Gauss-Seidel

Permasalahan:

Selesaikan sistem persamaan linear berikut dengan metode Gauss- Seidel.

$6x_1 + x_2 + 3x_3 = 23$

$2x_1 + 8x_2 + 4x_3 = 6$

$x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 19$

Nilai error $(\varepsilon x_1, \varepsilon x_2, \varepsilon x_3)$ =(0,01, 0,01,0,01)

Penyelesaian:

Langkah Pertama : Menentukan Nilai Awal Kita akan mengambil nilai awal untuk $x_1 = 0$ $x_2 = 0$ dan $x_3 = 0$

Langkah Kedua : Menyusun persamaan $x_1, x_2,$ dan x_3 Kita akan menyusun ketiga sistem persamaan linear tersebut menjadi seperti dibawah ini.

$x_1 = \frac{23 - x_2 - 3x_3}{6}$

$x_2 = \frac{6 - 2x_1 - 4x_3}{8}$

$x_3 = \frac{19 - x_1 - 2x_2}{9}$

Langkah Ketiga : Melakukan Iterasi Iterasi ke-1

$x_1{}' = \frac{23 - x_2 - 3x_3}{6} = \frac{23 - 0 - 3(0)}{6} = \frac{23}{6} = 3{,}833333$

$x_2{}' = \frac{6 - 2x_1 - 4x_3}{8} = \frac{6 - 2(3{,}833333) - 4(0)}{8} = \frac{-1{,}666666}{8} = -\ 0{,}208333$

$x_3{}' = \frac{19 - x_1 - 2x_2}{13} = \frac{19 - 3.833333 - 2(-0{,}208333)}{9} = 1{,}731481$

$\varepsilon x_1 = \left| 3{,}833333 - 0 \right| = 3{,}833333 > 0{,}01$

$\varepsilon x_2 = \left| 0{,}208333 - 0 \right| = 0{,}208333 > 0{,}01$

$\varepsilon x_3 = \left| 1{,}731481 - 0 \right| = 1{,}731481 > 0{,}01$

Iterasi ke-2

$x_1 = 3{,}833333, x_2 = -\ 0{,}208333, x_3 = 1{,}731481$

$x_1'' = \frac{23 - x_2 - 3x_3}{6} = \frac{23 - (-0{,}208333) - 3(1{,}731481)}{6} = 3{,}002315$

$x_2'' = \frac{6 - 2x_1 - 4x_3}{8} = \frac{6 - 2(3{,}002315) - 4(1{,}731481)}{8} = -0{,}866319$

$x_3'' = \frac{19 - x_1 - 2x_2}{9} = \frac{19 - 3{,}002315 - 2(0{,}866319)}{9} = 1{,}970035$

$\varepsilon x_1 = \left| 3{,}002315 - 3{,}833333 \right| = 0{,}831018 > 0{,}01$

$\varepsilon x_2 = \left| -0{,}866319 - (-0{,}208333) \right| = 0{,}657986 > 0{,}01$

$\varepsilon x_3 = \left| 1{,}970035 - 1{,}731481 \right| = 0{,}238554 > 0{,}01$

Iterasi ke-3

$x_1 = 3{,}002315, x_2 = -0{,}866319, x_3 = 1{,}970035$

$x_1''' = \frac{23 - x_2 - 3x_3}{6} = \frac{23 - (-0{,}866319) - 3(1{,}970035)}{6} = 2{,}992702$

$x_2''' = \frac{6 - 2x_1 - 4x_3}{8} = \frac{6 - 2(2{,}992702) - 4(1{,}970035)}{8} = -0{,}983193$

$x_3''' = \frac{19 - x_1 - 2x_2}{9} = \frac{19 - 2{,}992702 - 2(-0{,}983193)}{9} = 1{,}997076$

$\varepsilon x_1 = \left| 2{,}992702 - 3{,}002315 \right| = 0{,}009612 < 0{,}01$

$\varepsilon x_2 = \left| -0{,}983193 - (-0{,}866319) \right| = 0{,}116874 > 0{,}01$

$\varepsilon x_3 = \left| 1{,}997076 - 1{,}970035 \right| = 0{,}027041 > 0{,}01$

Iterasi ke-4

$x_1 = 2{,}992702, x_2 = -0{,}983193, x_3 = 1{,}997076$

$x_1'''' = \frac{23 - x_2 - 3x_3}{6} = \frac{23 - (-0{,}983193) - 3(1{,}997076)}{6} = 2{,}998660$

$x_2'''' = \frac{6 - 2x_1 - 4x_3}{8} = \frac{6 - 2(2{,}998660) - 4(1{,}997076)}{8} = -0{,}998203$

$x_3''' = \frac{19 - x_1 - 2x_2}{9} = \frac{19 - 2,998660 - 2(-0,998203)}{9} = 1,999749$

$\varepsilon x_1 = \left|2,998660 - 2,992702\right| = 0,005958 < 0,01$

$\varepsilon x_2 = \left| = -0,998203 - (-0,983193)\right| = 0,015010 = 0,01$

$\varepsilon x_3 = \left|1,999749 - 1,997076\right| = 0,002672 < 0,01$

Iterasi ke-5

$x_1 = 2,998660, x_2 = -0,998203, x_3 = 1,999749$

$x_1''''' = \frac{23 - x_2 - 3x_3}{6} = \frac{23 - (-0,998203) - 3(1,999749)}{6} = 2,999826$

$x_2''''' = \frac{6 - 2x_1 - 4x_3}{8} = \frac{6 - 2(2,999826) - 4(1,999749)}{8} = -0,999831$

$x_3''''' = \frac{19 - x_1 - 2x_2}{9} = \frac{19 - 2,999826 - 2(-0,999831)}{9} = 1,999981$

$\varepsilon x_1 = \left|2,999826 - 2,998660\right| = 0,001166 < 0,01$

$\varepsilon x_2 = \left| = -0,999831 - (-0,998203)\right| = 0,001628 < 0,01$

$\varepsilon x_3 = \left|1,999981 - 1,999749\right| = 0,000232 < 0,01$

Saat iterasi ke-5 ternyata nilai galatnya $<$ nilai batas toleransi yang telah memenuhi maka nilai $[x_1. x_{2,} x_3] = [2,999826, -0,999831, 1,999981]$

KESIMPULAN

Metode Gauss-Seidel digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linier (SPL) berukuran besar dan proporsi koefisien nolnya besar, seperti sistem-sistem yang banyak ditemukan dalam sistem persamaan diferensial.Teknik iterasi jarang digunakan untuk menyelesaikan SPL Metode ini ditemukan oleh matematikawan yang berasal dari jerman oleh Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) dan Philipp Ludwig von Seidel (1821-1896).

Gauss-Seidel mempunyai kelebihan dan kelemahan .diantaranya kelebihanny ialah lebih menghemat waktu dalam menyelesaikan persamaan yang rumit.Namun tidak semua persamaan menghasilkan jawaban yang benar.

REFERENSI

Darmono, P. B. (2012). Solusi Sistem Persamaan Linear dengan Metode Jacobi. *LIMIT-Pendidikan Matematika*, *02*.

Sahid. (2015). *sistem persamaan linear*.

Sistem, P., Linier, P., Gauss-seidel, M. M. I., Rikarti, E., Sains, F., Teknologi, D. A. N., Islam, U., Sultan, N., & Kasim, S. (2013). *MENGGUNAKAN METODE ITERASI GAUSS-SEIDEL Diajukan sebagai Salah Satu Syarat MENGGUNAKAN METODE ITERASI GAUSS-SEIDEL*.

Yuliana, M. (n.d.). *metode gauss seidel*