Jurnal Pustaka Cendekia Pendidikan
Volume 01, No. 02, Januari - Februari 2024, pp. 88-98
E-ISSN: 2988-7720
Website: https://pcpendidikan.org/index.php/jpcp

Integral Lipat Dua dalam Koordinat Kutub (Polar)

Radhiatul Asna

Program Studi S1 Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Pahlawan Tuanku Tambusai, Jl. Tuanku Tambusai No. 23 Bangkinang Kota, Kab. Kampar, Provinsi Riau
radhiatulasna99@gmail.com

Abstract

Double integrals are ordinary/single integrals where the result of the first integration must be reintegrated. This article will explain how to determine the value of the double integral in polar coordinates. The information collection method used is a literature study. By determining the double integral in polar coordinates, students can distinguish polar coordinates and Cartesian coordinates.
Keywords: Integral, Double Integral, Polar Coordinates

Abstrak

Integral lipat-dua (*double integrals*) merupakan bentuk integral biasa/tunggal yang hasil pengintegralan pertama harus diintegralkan kembali. Pada artikel ini akan dijelaskan cara menentukan nilai dari integral lipat dua dalam koordinat kutub (polar) . Metode pengumpulan informasi yang digunakan adalah studi literatur. Dengan menentukan integral lipat dua dalam koordinat kutub (polar) maka peserta didik dapat membedakan koordinat kutub dan koordinat Cartesius.
Kata Kunci: Integral, Integral Lipat Dua, Koordinat Kutub

✉Corresponding author: Radhiatul Asna
Email Address: radhiatulasna99@gmail.com (Jl. Tuanku Tambusai No. 23 Bangkot, Kab. Kampar, Riau)
Received 07 January 2024, Accepted 13 January 2024, Published 20 January 2024

PENDAHULUAN

Integral lipat-dua (*double integrals*) merupakan bentuk integral biasa/tunggal yang hasil pengintegralan pertama harus diintegralkan kembali. Biasanya dinyatakan sebagai berikut:

$$\iint f(x,y)\,dx\,dy$$

Pernyataan diatas disebut dengan integral lipat dua tak tentu (*indifinite double integrals*) dikarenakan tidak memiliki batas atas dan batas bawah. Sedangkan pada kondisi lainnya, dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

Pernyataan diatas disebut dengan integral lipat dua tertentu (*difinite double integrals*) karena tiap-tiar integralnya mempunyai batas atas (x_2 dan y_2) dan batas bawah (x_1 dan y_1).

Sifat-sifat integral lipat dua (*double integrals*) antara lain sebagai berikut:

1. Jika $f(x,y)$ dan $g(x,y)$ masing-masing kontinu dalam daerah R, maka:

$$\iint_R kf(x,y)\,dA = k\iint_R f(x,y)\,dA$$

$$\iint_R [f(x,y) + g(x,y)]\, dA = \iint_R f(x,y)\, dA + \iint_R g(x,y)\, dA$$

2. Integral lipat-dua adalah aditif pada persegi panjang yang saling melengkapi hanya pada suatu ruas garis.

$$\iint_R f(x,y)\, dA = \iint_{R_1} f(x,y)\, dA + \iint_{R_2} f(x,y)\, dA$$

3. Sifat pembanding berlaku jika $f(x,y) \leq g(x,y)$ untuk semua (x,y) di R, maka:

$$\iint_R f(x,y)\, dA \leq \iint_R g(x,y)\, dA$$

Jadi, kita dapat mengharapkan bahwa integral lipat dua pada daerah yang dikurung oleh kurva-kurva yang demikian lebih mudah dihitung dengan menggunakan koordinat polar.

METODE

Secara umum tulisan ini memuat latar belakang penulisan. Terdapat gambaran umum dari latar belakang tentang permasalahan yang dibahas. Kemudian disajikan teori-teori yang membantu penulisan dalam menyelesaikan masalah yang dipaparkan sebelumnya, sehingga pada pembahasan selanjutnya merupakan pembahasan keseluruhan tulisan ini yang memberikan penjelasan tentang cara menentukan integral lipat dua dalam koordinat kutub (polar). Semua penulisan sudah didasari pada artikel maupun jurnal yang berkaitan dengan materi penulisan.

HASIL DAN DISKUSI

Integral

Fungsi F dikatakan sebuah antiturunan dari *f* pada selang jika F'(x) = f(x) untuk semua x pada *I*. pada awalnya, notasi anti turunan dinyatakan dengan A_x, dimana

$$A_x[2x] = x^2 + C, A_x[x^2 - 2x] = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + C$$

Akan tetapi, perkembangan saat ini lebih banyak menggunakan notasi "integral" yang dicetuskan oleh Leibniz. Notasi ini dapat dituliskan sebagai berikut;

$$\int f(x)dx = F(x) = C, \text{dimana } F'(x) = f(x)$$

Anti turunan di atas, selanjutnya dikenal atau disebut sebagai Integral Taktentu. (Toheri, 2015)

Teorema Dasar Kalkulus

Teorema : andai *f* kontinu pada $[a,b]$ dan andaikan *F* sembarang anti turunan dari *f*. Maka $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Bukti :

Misal selang $[a,b]$ dipartisi menjadi $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, sehingga

$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) + \cdots + F(x_1) - F(x_0)$

$$= \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})]$$

Pada tiap selang bagian $[x_{i-1}, x_i]$

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})} . (x_i - x_{i-1}) = F'(\overline{x_i})(x_i - x_{i-1})_i$$

dan

$$F'(\overline{x_i})(x_i - x_{i-1}) = f'(\overline{x_i})\Delta x_i$$

Untuk semua selang dalam $[a, b]$,

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f\,(\overline{x_i}). \Delta x_i$$

Sesuai definisi integral Riemann diperoleh

$$F(b) - F(a) = \lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

Teorema A (Aturan Pangkat)

Jika r adalah sebarang bilangan rasional kecuali -1, maka

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$$

Untuk memahami teorema tersebut, mari kita lihat contoh berikut ini.

Contoh:

Tentukanlah hasil dari $\int (x^3 - 2x^2 + 2x - 2)dx$

Jawab:

$\int (x^3 - 2x^2 + 2x - 2)dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} - \frac{2^{2+1}}{2+1} + \frac{2x^{1+1}}{1+1} - \frac{2x^{0+1}}{0+1} + C$

$= \frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 + x^2 - 2x + C$

Teorema B (Anti Turunan Dasar Trigonometri)

$$\int sin\, xdx = -cosx + C$$

$$\int \cos xdx = \sin x + C$$

Bukti teorema ini dapat diperoleh dengan menurunkan bagian sebelah kanan. Misalkan, $D_x[\sin x + C] = \cos x + 0 = \cos x$. Pemahaman tentang identitas fungsi trigonometri pada kajian kalkulus I akan membantu proses integrasi pada fungsi trigonometri. Identitas trigonometri diperlukan terutama pada integran yang berbeda dengan integran pada aturan dasarnya.

Teorema C (Integral Tak Tentu sebagai Operator Linier)

Misalkan f dan g mempunyai anti-turunan (integral tak tentu) dan misalkan k konstanta, maka

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$$

Bukti :

Teorema tersebut cukup dibuktikan dengan menentukan turunan dari ruas kanan,

$D_x\lfloor k\int f(x)dx\rfloor = k.D\lfloor f(x)dx\rfloor$ (berdasarkan sifat linier turunan)

$k.D_x\lfloor f(x)dx\rfloor = kD_x[F(x)+C] = k.F^1(x) = kf(x)$

Mari kita kaji integral-integral berikut:

(1) $\int(x-1)^2dx$

(2)$\int(x^2-1)^3\,xdx$

Soal (1) dapat selesaikan dengan cara menguraikan integran menjadi $(x-1)^2 = x^2-2x+1$ selanjutnya gunakan sifat linier akan diperoleh $\int(x-1)^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + C$

Bagaimana dengan soal (2)? Dengan cara yang sama diperoleh, $(x^2-1)^3x = (x^6-3x^4+3x^2-1) = x^7-3x^5+3x^3-x$. Tentu saja dibutuhkan pemahaman tentang perkalian polinom atau segitiga pascal atau persamaan Binomial untuk mendapatkannya. Hasil akhir tersebut menunjukkan bahwa $\int(x^2-1)^3xdx = \frac{1}{8}x^8 - \frac{x^6}{2} + \frac{3x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + C$.

Sedikit mengingat kembali tentang aturan rantai untuk turunan, yakni;

Jika *u = g(x)* memiliki turunan dan n bilangan rasional, maka

$$\frac{d}{dx}[u^n] = \frac{d}{du}[u^n]\frac{du}{dx} = n.u^{n1}.g'(x) = n.[g(x)]^{n-1}.g'(x)$$

Dengan pendekatan turunan implisit, bisa dinyatakan

$$d(u^n) = n[g(x)]^{n-1}.g'(x)dx$$

Integralkan kedua ruas, bisa diperoleh

$$u^n = n\int[g(x)]^{n-1}.g'(x)dx$$

atau,

$$\int[g(x)]^{n-1}.g'(x)dx = \frac{u^n}{n} + C = \frac{[g(x)]^n}{n} + C$$

Ambil n – 1 = r, sehingga menjadi

$$\int[g(x)]^r\,.g'(x)dx = \frac{[g(x)]^{r+1}}{r+1} + C$$

Asalkan r tidak sama dengan -1.

Integral Lipat Dua

Misalkan fungsi *z = f(x,y)* didefinisikan pada suatu daerah tertutup R di bidang xoy. Kemudian daerah ini dibagi atas n buah sub daerah yang masing-masing luasnya $A_{1,}, A_2, A_3, \cdots\cdots A_n$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(X_k)\,\Delta X_k$$

Dalam setiap sub daerah, pilih suatu titik $P_K(x_k,\ y_{k)}$dan bentuklah jumlah:

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k)\Delta_k\,A = f(x_1,y_{1)}\Delta_1 A + (x_2,y_{2)}\Delta_2 A + \cdots + (x_n,y_n)\Delta_n A$$

Jika jumlah sub daerah makin besar (n→∞), maka integral rangkap (lipat dua) dari fungsi *f(x,y)* atas daerah R didefinisikan:

$$\iint_R f(x,y)dA = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta_k A$$

Untuk menghitung integral lipat dua dapat digunakan integral berulang yang ditulis dalam bentuk :

1.

$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_R f(x,y)dxdy = \int_a^b \left\{ \int_{y=f_1(y)}^{y=f_2(y)} f(x,y)dx \right\} dy$$

Di mana integral yang ada dalam kurung harus dihitung terlebih dahulu dengan menganggap variabel y konstanta, kemudian hasilnya diintegralkan kembali terhadap y.

2.

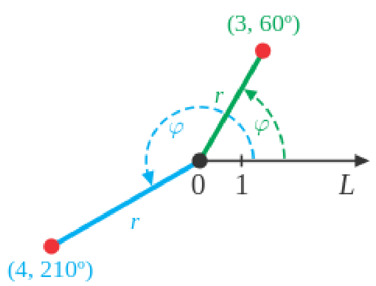
$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_R f(x,y)dydx = \int_a^b \left\{ \int_{y=f_1(y)}^{y=f_2(y)} f(x,y)dy \right\} dx$$

Di mana integral yang ada dalam kurung harus dihitung terlebih dahulu dengan menganggap variable x konstanta, kemudian hasilnya diintegral kembali terhadap x. Jika integral lipat dua diatas ada, maka 1 dan 2 secara umum akan memberikan hasil yang sama. (ADNAN, 2020)

Sistem Koordinat Polar

Sistem koordinat polar (sistem koordinat kutub) adalah suatu sistem koordinat 2 dimensi dimana setiap titik pada bidang ditentukan dengan jarak dari suatu titik yang telah ditetapkan dan sudut dari suatu arah yang telah ditetapkan.

Sistem koordinat polar terdiri dari sumbu polar, yaitu berupa setengah garis yang berimpit dengan sumbu x positif pada bidang R^2 dan titik asal O. Setiap titik P pada bidang kemudian dinyatakan dengan jaraknya dari O, katakanlah r, dan besar sudut θ yang dibentuk oleh ruas garis OP dan sumbu polar (dihitung berlawanan arah dengan arah jarum jam).

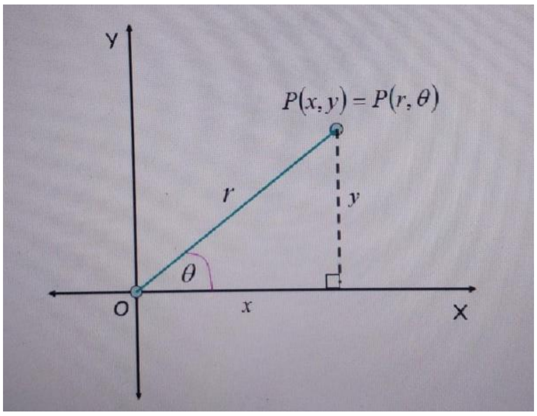


Gambar 1 Sistem Koordinat Polar

Titik yang telah ditetapkan (analog dengan titik origin dalam sistem koordinat Cartesius) disebut Pole atau Kutub, dan Ray atau Sinar dari kutub pada arah yang telah ditetapkan disebut Aksis Polar.

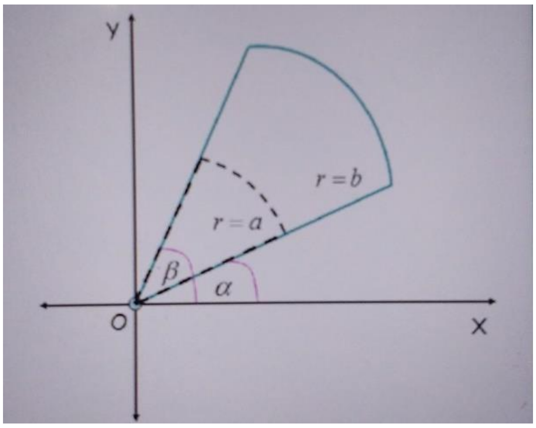
Hubungan Koordinat Polar dan Koordinat Cartesius

Titik P(x,y) pada suatu sistem koordinat Cartesius dapat ditentukan koordinat kutubnya dengan memperhatikan bahwa x = r cosθ, y = r sinθ, r = $\sqrt{x^2 + y^2}$ dan θ = arctg $\frac{y}{x}$. Sehingga titik P(x,y) dapat dinyatakan dalam koordinat kutub sebagai P(r,θ).



Gambar 2. Koordinat Cartesius

Akibat perubahan koordinat Cartesius menjadi koordinat Kutub tersebut akan diperoleh D = $\{(r,\theta)|a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta\}$.



Gambar 3. Koordinat Kutub

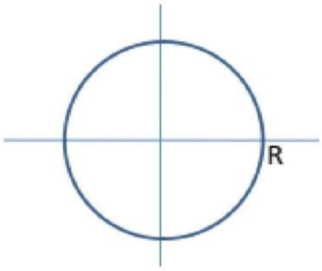
Karena $\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta, \frac{\partial x}{\partial \theta} = -rsin\theta, \frac{\partial y}{\partial r} = sin\theta$ dan $\frac{\partial y}{\partial \theta} = rcos\theta$, maka dapat ditentukan determinan Jacobi sebagai:

J = $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\ sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$ = r($cos^2\,\theta\ +\ sin^2\theta$) = r

Sehingga luas daerah bidang yang dibatasi oleh kurva tertutup y = f(x) dalam koordinat kutub, dapat ditentukan sebagai L = $\iint rdrd\theta$.

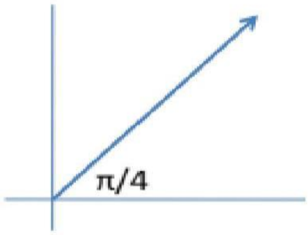
Persamaan Kurva dengan Koordinat Polar

Persamaan lingkaran yang berpusat di O dan berjari-jari R dapat dinyatakan secara sederhana dalam koordinat polar sebagai r = R, $0 \leq \theta \leq 2\pi$



Gambar 4.

Persamaan setengah garis y = x, dengan x > 0, dapat dinyatakan dalam koordinat polar sebagai $r > 0, \theta \geq \frac{\pi}{4}$

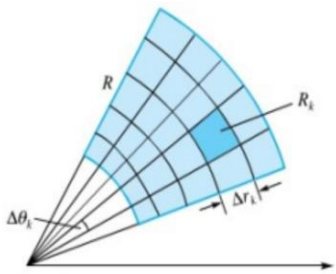


Gambar 5.

Perhitungan Integral Lipat Dua dalam Koordinat Polar

Jika elemen luas dalam koordinat cartesius dinyatakan dengan $\Delta A = \Delta x. \Delta y$, maka elemen luas dalam koordinat polar dinyatakan dengan $\Delta A = r\Delta r. \Delta\theta$. (Resmawan, 2018)

Perhatikan gambar berikut.



Gambar 6.

Dengan subtitusi stitusi x = r cos θ dan y = r sin θ, integral lipat dua yang semula dinyatakan dalam koordinat Cartesius sekarang dinyatakan dalam koordinat polar sebagai:

$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_R f(r\cos\theta,\ r sin\theta)\ r\ drd\theta$$

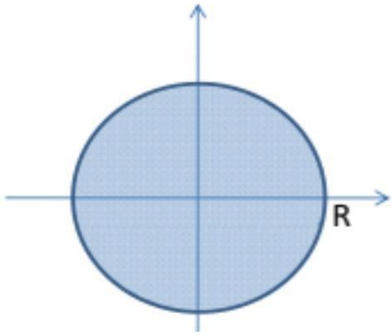
Beberapa daerah dalam koordinat polar yang perlu diperhatikan:

1. Daerah Cakram Lingkaran

$$S = \{(x,y)|x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

dapat dinyatakan sebagai

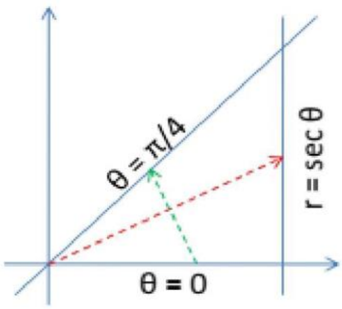
$$S = \{(r,\theta|0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$



Gambar 7.

2. Daerah segitiga yang dibatasi oleh sumbu x, garis y = x, dan garis x = 1, merupakan daerah r sederhana, dengan

$$0 \le r \le sec\,\theta, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$$



Gambar 8.

Contoh 1 :

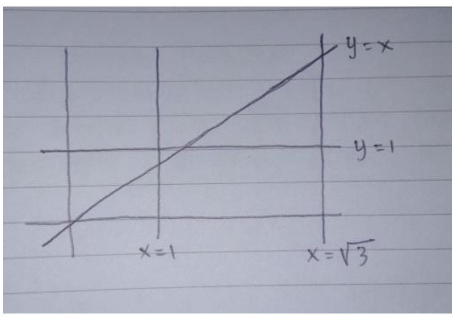
Hitunglah :

$$\int_1^{\sqrt{3}} \int_1^{x} dydx$$

Penyelesaian :

$1 \le y \le x$

$1 \le x \le \sqrt{3}$



Gambar 9.

$y = 1 \rightarrow r \sin\ \theta = 1$

$$r = \frac{1}{\sin\ \theta}$$

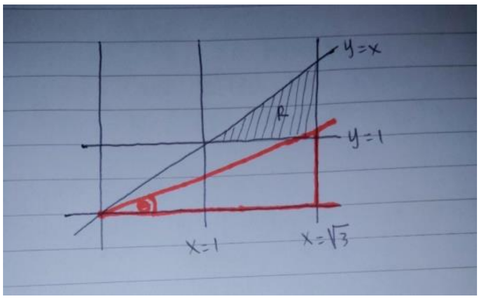
$$r = \csc\theta$$

$$x = \sqrt{3} \rightarrow r\cos\,\theta = \sqrt{3}$$

$$r = \frac{\sqrt{3}}{\cos\,\theta}$$

$$r = \sqrt{3}\sec\,\theta$$

Tentukan sudut terkecil dari daerah R



Gambar 10.

Untuk menentukan besar sudut θ tersebut dapat menggunakan

$$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\theta = 30° \rightarrow \frac{\pi}{6}\ (karena\ terletak\ di\ kuadran\ 1)$$

$$\theta = 45° \rightarrow \frac{\pi}{4}$$

$$\int_{1}^{\sqrt{3}}\int_{1}^{x} dydx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\int_{\csc\theta}^{\sqrt{3}\sec\,\theta} r\,drd\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}r^2 \Bigg|_{\csc\theta}^{\sqrt{3}\,\sec\theta} d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}(\sqrt{3}\sec\theta)^2 - \frac{1}{2}(\csc\theta)^2\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} 3\,sec^2 - csc^2\,\theta\,d\theta$$

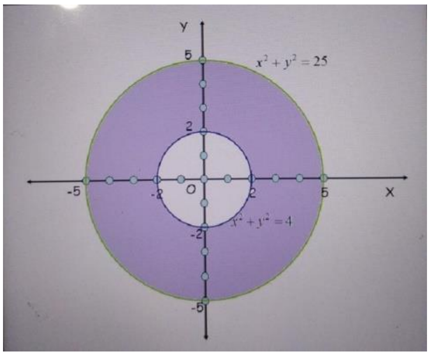
$$= \frac{1}{2}(3\tan\,\theta - cotg\,\theta)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{1}{2}(3+1) - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}\right) = 2 - \sqrt{3}$$

Contoh 2 :

Hitunglah luas daerah di luar lingkaran $x^2 + y^2$ = 4 dan didalam lingkaran $x^2 + y^2$ = 25.

Penyelesaian :



Gambar 11.

Karena D = $\{(x, y)|x^2 + y^2 > 4, x^2 + y^2 \leq 25\}$ maka $\theta = 0$ sampai $\theta = 2\pi$, dan r = 2 sampai r = 5

L = $\iint_D \, dA$ = $\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=2}^{r=5} r. drd\theta$

= $\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left[\frac{1}{2}r^2\right]_{r=2}^{r=5}$

= $\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left[\frac{21}{2}\right] d\theta$

= $\left[\frac{21}{2}\theta\right]_0^{2\pi}$

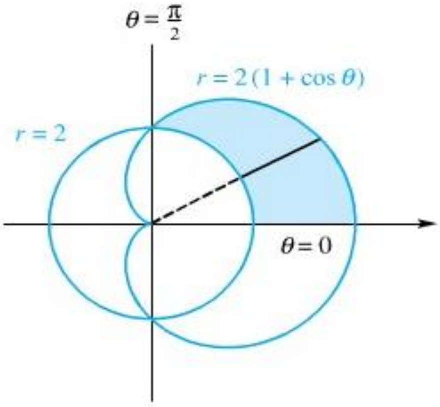
= 21π

Contoh 3 :

Hitunglah

$$\iint_S y \, d \, A$$

di mana S adalah daerah di kuadran pertama yang berada di luar lingkaran $r = 2$ dan di dalam kardioid $r = 2\,(1 + \cos\theta)$



Gambar 12.

Penyelesaian :

$$\begin{aligned}\iint_S y\,dA &= \int_0^{\pi/2}\int_2^{2(1+\cos\theta)} (r\sin\theta)r\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2}\left[\frac{r^3}{3}\sin\theta\right]_2^{2(1+\cos\theta)} d\theta \\ &= \frac{8}{3}\int_0^{\pi/2}\left[(1+\cos\theta)^3\sin\theta - \sin\theta\right]d\theta \\ &= \frac{8}{3}\left[-\frac{1}{4}(1+\cos\theta)^4 + \cos\theta\right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{8}{3}\left[-\frac{1}{4} + 0 - (-4+1)\right] = \frac{22}{3}\end{aligned}$$

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan diatas, diperoleh kesimpulan sebagai berikut. Pertama, titik P(x,y) pada suatu sistem koordinat Cartesius dapat ditentukan koordinat kutubnya dengan memperhatikan bahwa x = r cosθ, y = r sinθ, r = $\sqrt{x^2+y^2}$ dan θ = arctg $\frac{y}{x}$. Sehingga titik P(x,y) dapat dinyatakan dalam koordinat kutub sebagai P(r,θ). Kedua, persamaan lingkaran yang berpusat di O dan berjari-jari R dapat dinyatakan secara sederhana dalam koordinat polar sebagai r = R, $0 \le \theta \le 2\pi$

Ketiga, persamaan setengah garis y = x, dengan x > 0, dapat dinyatakan dalam koordinat polar sebagai $r > 0, \theta \ge \frac{\pi}{4}$. Keempat, Dengan subtitusi stitusi x = r cos θ dan y = r sin θ, integral lipat dua yang semula dinyatakan dalam koordinat Cartesius sekarang dinyatakan dalam koordinat polar sebagai:

$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_R f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\, r\, dr d\theta$$

Penulis menyadari bahwa artikel ini masih memiliki banyak kekurangan, baik dari segi penulisan maupun materi. maka dari itu penulis sangat berharap saran dan kritik dari pembaca guna memperbaiki kualitas artikel ini.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada seluruh pihak yan telah terlibat dalam penulisan artikel ini.

REFERENSI

Mendelson, Elliot. 1988. *Schaum's Outlines, 3000 Solved Problems in Calculus*.
New York: Mc Graw-Hill.
ADNAN, S. R. (2020). *Integral lipat*. *1*(Ind 124), 41–56.
Resmawan. (2018). *Kalkulus Lanjut*. *November*, 1–38.
Toheri. (2015). *Buku Kalkulus Integral 2015 Eduvision.pdf*.