Jurnal Pustaka Cendekia Pendidikan
Volume 02, No. 02, September-Desember 2024, pp. 124-131
E-ISSN: 2988-7720
Website: https://pcpendidikan.org/index.php/jpcp

Integrasi Numerik Fungsi Eksponensial dengan Metode *Romberg* dan *Gauss-Legendre*

Resa Aprinita Sari

Program Studi Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Pahlawan Tuanku Tambusai, Jl. Tuanku Tambusai No.23, Bangkinang, Kec. Bangkinang, Kabupaten Kampar, Riau
aprinitaresa@gmail.com

Abstract

Numerical integration is a method of integrating a function that produces an approximation to its exact value. Sometimes a function that has a complex shape will be very difficult to solve using analytical integration techniques with standard forms, so in this case numerical integration is needed to determine its value. There are two approaches to numerical integration, namely the Newton-Coates (equally space) and Gauss-Quadrature (unequally space) methods. One of the Newton-Coates methods that has good accuracy (smaller error) is the Romberg method, this method is obtained from Richardson's extrapolation which is applied continuously from the Simpson 1/3 method, Simpson 3/8 method, and the Boole method, so we get the Romberg method. Meanwhile, the Gauss-Quadrature method which is considered to have good accuracy is the Gauss-Legendre method, this method transforms the limit of function integration [a,b] into limit [-1,1]. To determine the integration value in Gauss-Legendre, several evaluation points (fixed points) x_i with i=0,1,2,…,n-1 and a weighting function w_i with i=0,1,2,…,n-1 . The more evaluation points used, the more accurate the integration results will be. In this article, we will examine the comparison of the accuracy of the numerical integration of the two methods, namely the Romberg and Gauss-Legendre methods which will be applied to solve the modified exponential function.
Keywords: Exponential Functions, Gauss-Legendre, Numerical Integration, Romberg

Abstrak

Integrasi numerik merupakan metode pengintegralan suatu fungsi yang menghasilkan nilai hampiran (aproksimasi) terhadap nilai eksaknya. Adakalanya suatu fungsi yang memiliki bentuk rumit akan sangat susah diselesaikan dengan menggunakan teknik pengintegralan secara analitik dengan bentuk baku, maka dalam hal ini pengintegralan secara numerik diperlukan untuk menentukan nilainya. Terdapat dua pendekatan dalam pengintegralan numerik yaitu dengan metode Newton-Coates (equally space) dan Gauss-Kuadratur (unequaly space). Salah satu metode Newton-Coates yang memiliki ketelitian yang baik (error semakin kecil) adalah metode Romberg, metode ini didapatkan dari ekstrapolasi Richardson yang diterapkan secara terus menurus dari metode simpson $\frac{1}{3}$, simpson $\frac{3}{8}$, dan metode Boole, sehingga didapatkan metode Romberg. Sedangkan metode Gauss-Kuadratur yang dianggap memiliki ketelitian yang baik adalah metode Gauss-Legendre, metode ini mentransformasi batas integrasi fungsi [a,b] menjadi batas [-1,1]. Untuk menentukan nilai integrasinya pada Gauss-Legendre dibutuhkan beberapa titik evaluasi (fixed point) $x_i$dengan $i = 0,1,2, \dots , n - 1$ dan fungsi pembobot $w_i$dengan $i = 0,1,2, \dots , n - 1$. Semakin banyak titik evaluasi yang digunakan maka akan semakin akurat hasil integrasi yang didapatkan. Pada artikel ini akan dikaji perbandingan keakuratan integrasi numerik kedua metode yaitu metode Romberg dan Gauss-Legendre yang akan diterapkan untuk menyelesaikan fungsi eksponensial yang telah dimodifikasi.
Kata Kunci: Fungsi Eksponensial, Gauss-Legendre, Integrasi Numerik, Romberg

✉ Corresponding author: Resa Aprinita Sari
Email Address: aprinitaresa@gmail.com (Jl. Tuanku Tambusai No.23, Bangkinang, Kab.Kampar, Riau)
Received 19 October 2024, Accepted 25 October 2024, Published 31 October 2024

PENDAHULUAN

Model matematika sering dijumpai dalam kehidupan sehari-hari, model tersebut muncul dalam berbagai disiplin ilmu pengetahuan seperti dalam fisika, kimia, ekonomi, dan juga ilmu teknik, seperti teknik sipil, teknik mesin, teknik eletro dan lain sebagainya [1]. Model matematika yang rumit tersebut adakalanya akan berbentuk tidak wajar dan sulit untuk ditentukan solusi sejatinya (eksak). Sehingga pada kasus seperti inilah metode numerik bekerja untuk menghampiri solusi sejati dari model matematika tersebut.(Darmawan, 2015)

Salah satu kasus yang sering muncul adalah masalah integral, bentuk integral yang ada dalam ilmu kalkulus dan metode penyelesaiannya secara analitik menjadi suatu permasalahn tersendiri untuk menyelesaikannya jika bentuk integral tersebut tak wajar dan rumit ditambah lagi melibatkan fungsi eksponensial. Fungsi eksponensial sering muncul pada permasalahan persamaan diferensial, baik biasa maupun parsial, dimana penliti diharuskan untuk menyelesaikan persamaan tersebut dengan menentukan nilai integrasinya. Sehingga pada masalah ini integrasi secara numerik akan sangat membantu dalam menentukan solusinya.(Darmawan, 2016)

Pengintegralan secara numerik atau lebih dikenal dengan integrasi numerik merupakan suatu metode aproksimasi untuk memperoleh nilai integral suatu fungsi secara numerik, metode ini digunakan pada fungsi-fungsi yang diintegralkan dengan metode analitik agak sulit. Integrasi numerik dibagi emnjadi dua garis besar yaitu metode Newton Coates (equally space) dan metode kuadratur Gauss (unequaly space). Metode Newton Coates diantaranya meliputi metode trapesium, Simpson 1/3, simpson 3/8, Boole [2]. Sedangkan metode kuadratur Gauss diantaranya adalah metode Gauss-Legendre, Lobatto, Kromroad, Radau, Hermit, Laguerre, dan sebagianya.(Munir, n.d.)

Metode Romberg merupakan pengembangan metode Trapesium secara rekrsif dan ekstrapolasi Richardson yang bertujuan untuk menghasilkan estimasi nilai integrasi yang memiliki nilai error yang lebih baik dari metode-metode sebelumnya [3]. Metode ini merupakan metode iteratif sehingga dalam prosesnya melibatkan perhitungan komputer untuk lebih mudah dalam menyelesaikan integrasi fungsi yang rumit karena melibatkan perhitungan yang cukup panjang jika secara manual.(Radesa et al., 2016).

Sedangkan metode Gauss-Legendre merupakan metode integrasi numerik yang berkonsep padametode trapesium akan tetapi melibatkan partisi interval yang tidak sama (unequally space) tergantung pada seberapa banyak titik-titik evaluasi yang digunakan titik-titk evaluasi (x_i) tersebut berkorespondensi dengan banyaknya fungsi pembobot w_i yang digunakan [6]. semakain banyak titik yang digunakan maka akan semakin akurat nilai integrasi mendekati nilia eksakya. (Yudianto, 2020)

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menetukan tingkat keakuratan kedua metode berdasarkan dengan nilai relative error (ε_r) yang dihasilkan. Penelitian ini memiliki manfaat untuk memberikan informasi terkait metode pengintegralan yang bagus dan akurat untuk menyelesaikan kasus model matematika yang melibatkan bentuk integrasi yang rumit dapat diselesaikan dengan benar dan mendekati nilai eksaknya, sehingga pemilihan metode yang tepat akan berdampak signifikan saat metode tersebut diterapkan dalam kasus-kasus tertentu.

METODE

Jenis penilitian ini adalah verificative research yaitu jenis penelitian yang bertujuan untuk menguji suatu teori atau hasil penelitian sebelumnya, sehingga diperoleh hasil yang memperkuat atau menggugurkan teori atau hasil penelitian sebelumnya.

HASIL DAN DISKUSI

Integeasi Numerik Metode Romberg

Metode Romberg merupakan pengembangan yang lebih tinggi dari metode Trapesium secara rekursif dengan ekstrapolasi Richardson, kedua metode ini bertujuan untuk mengestimasi nilai integrasi yang lebih akurat dengan nilai error yang relatif kecil.

Metode Romberg bersifat komputasi (iteratif) untuk menyelesaikan suatu persoalan integrasi numerik. Metode integrasi Romberg didasarkan pada perluasan ekstrapolasi Richardson untuk memperoleh nilai integrasi yang semakin baik. Sebagai catatan, setiap penerapan ekstrapolasi Richardson akan menaikkan order galat pada hasil solusinya sebesar dua:

$$o(h^{2n}) \rightarrow o(h^{2n+2)}$$

Misalkan I adalah nilai integrasi yang dinyatakan sebagai:

I=$A_k + Ch^2 + Dh^4 + Eh^6 + \cdots$

Yang dalam hal ini:

$h = \frac{b-a}{n}$, dan

$A_k = pekiraan\ nilai\ integrasi\ dengan\ kaidah\ trapesium\ dan\ jumlah\ pias\ \ n = 2^k$

Gunakan $A_0, A_1, \dots, A_K$ pada persamaan ekstrapolasi Richardson untuk mendapatkan runtunan $B_1, B_2, \dots, B_k$ yaitu:

$$B_k = A_k + \frac{A_k - A_{k-1}}{2^2 - 1}$$

Jadi, nilai I (yang lebih baik) sekarang adalah I = B_k + D'h^4 + E'h^6 +… dengan orde galat B_k adalah $o(h^4)$.

Selanjutnya, gunakan $B_{1,}B_2, \dots, B_k$ pada persamaan ekstrapolasi Richardson untuk mendapatkan runtunan $C_2, C_3, \dots, C_k$ yaitu:

$$C_k = B_k + \frac{B_k - B_{k-1}}{2^4 - 1}$$

Jadi, nilai I (yang lebih baik) sekarang adalah I = C_k + E '' h^6 + ... dengan orde galat C_k adalah $o(h^6)$.

Selanjutnya gunakan $C_2, C_3, \dots, C_k$pada persamaan ekstrapolasi Richardson untuk mendapatkan runtunan $D_3, D_4, \dots, D_k$ yaitu:

$$D_k = C_k + \frac{C_k - C_{k-1}}{2^6 - 1}$$

Jadi, nilai I (yang lebih baik) sekarang adalah I= $D_k + E'''h^8 + \cdots$ dengan orde galat D_k adalah $0(h^8)$. Demikian seterusnya.

Dari runtunan tersebut, diperoleh tabel yang dinamakan **Tabel Romberg** seperti berikut ini:

Tabel 1. Metode Romberg

O(h^2)	O(h^4)	O(h^6)	O(h^8)	O(h^{10})	O(h^{12})	O(h^{14})
A_0						
A_1	B_1					
A_2	B_2	C_2				
A_3	B_3	C_3	D_3			
A_4	B_4	C_4	D_4	E_4		
A_5	B_5	C_5	D_5	E_5	F_5	
A_6	B_6	C_6	D_6	E_6	F_6	G_6

nilai integrasi lebih baik

Contoh:

Hitunglah $\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$ dengan metode Romberg (n=8)

Penyelesaian:

Jarak antar titik: $h = \frac{1-0}{8} = 0{,}125$

Tabel titik-titik didalam selang [0,1] dengan h=0,125.

Tabel 2. Metode Romberg

x	x_n	$f(x_n)$
0	0	1,0000
1	0,125	0,88889
2	0,250	0,80000
3	0,375	0,72727
4	0,500	0,66667
5	0,625	0,61538
6	0,750	0,57143
7	0,875	0,53333
8	1,000	0,50000

$A_0 = \frac{h_0}{2}[f_0 + f_8] = \frac{1}{2}(1 + 0{,}50000) = 0{,}75000$

$A_1 = \frac{h_1}{2}[f_0 + 2f_4 + f_8] = \frac{0{,}5}{2}[1 + 2(0{,}66667) + 0{,}50000] = 0{,}70833$

$A_2 = \frac{h_2}{2}[f_0 + 2f_2 + 2f_4 + 2f_6 + f_8] = \frac{0{,}250}{2}[1 + 2(0{,}80000) + 2(0{,}66667) + 2(0{,}57143) + 0{,}50000] = 0{,}69702$

$A_3 = \frac{h_3}{2}[f_0 + 2f_1 + 2f_3 + 2f_4 + 2f_5 + 2f_6 + 2f_7 + f_8] = \frac{0{,}125}{2}[1 + 2(0{,}88889) + 2(0{,}80000) + \ldots + 2(0{,}53333) + 0{,}50000] = 0.69412$

$B_1 = A_1 + \frac{A_1 - A_0}{2^2-1} = 0{,}69445$ $\quad (A_k berorde 2, jadi\ q = 2)$

$B_2 = A_2 + \frac{A_2 - A_1}{2^2-1} = 0{,}69325$

$B_3 = A_3 + \frac{A_3 - A_2}{2^2-1} = 0{,}69315$

$C_2 = B_2 + \frac{B_2 - B_1}{2^4-1} = 0{,}69317$ $\quad (B_k\ berorde\ 4, jadi\ q = 4)$

$C_3 = B_3 + \frac{B_3 - B_2}{2^4-1} = 0{,}69314$

$D_3 = C_3 + \frac{C_3 - C_2}{2^6-1} = 0{,}69314$ $\quad (C_k\ berorde\ 6, jadi\ q = 6)$

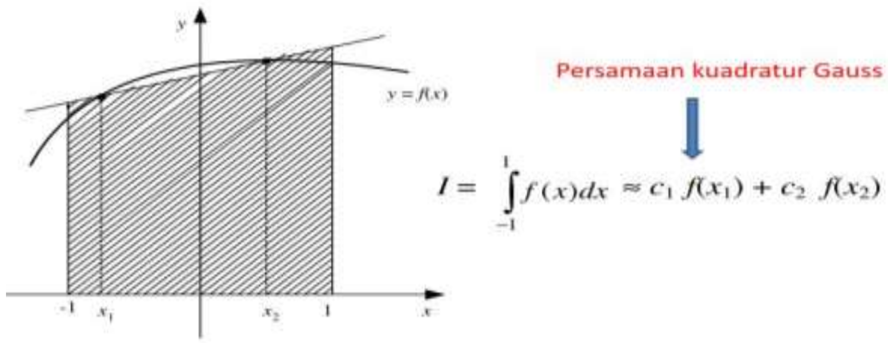
Tabel 3. Metode Romberg

k	$o(h^2)$	$o(h^4)$	$o(h^6)$	$o(h^8)$
0	0,75000			
1	0,70833	0,69445		
2	0,69702	0,69325	0,69317	
3	0,69412	0,69315	0,69314	0,69314

Jadi, $\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \approx 0{,}69314$

Integrasi Numerik Metode Gauss-Legendre

Sebuah garis lurus di tarik menghubungkan dua titik sembarang pada kurva $y = f(x)$, titik-titik tersebut di atur sedemikian sehingga garis lurus tersebut menyeimbangkan galat positif dan galat negatif, luas daerah yang di hitung adalah luas daerah dibawah garis lurus.



Gambar 1. Metode Gauss Legendre

dengan c_1 , c_2 , x_1 , dan x_2 adalah sembarang nilai.

Perhatikan bahwa bila dipilih x_1 = -1 , x_2=1, dan $c_1 = c_2 = 1$, maka persamaan Kuadratur-Gauss menjadi kaidah trapesium:

$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(1) + f(-1)] \approx f(1) + f(-1)$

dengan h=(1-(-1))=2

Jadi, kaidah trapesium memenuhi persamaan kuadratur Gauss

Persamaan kuadratur Gauss mengandung empat buah peubah yang tidak diketahui, yaitu $x_1, x_2, c_1, dan\ c_2$.

Kita harus memilih $x_1, x_2, c_1, dan\ c_2$ sedemikian sehingga galat integrasinya minimum.

Karena ada empat buah peubah yang tidak diketahui, maka kita harus mempunyai empat buah persamaan simultan yang mengandung $x_1, x_2, c_1, dan\ c_2$.

Dapat dilihat bahwa nilai integrasi numerik dengan kaidah trapesium akan tepat (galatnya = 0) untuk fungsi tetap dan fungsi lanjar. Misalnya untuk f(x)=1 dan f(x)=x.

F(x)=1 → $\int_{-1}^{1} 1dx = x \Big|_{x=-1}^{x=1} = 1 - (-1) = 2 = c_1 + c_2$

F(x)=x → $\int_{-1}^{1} xdx = \frac{1}{2}x^2 \Big|_{x=-1}^{x=1} = \frac{1}{2}(1)^2 - \frac{1}{2}(-1)^2 = 0 = c_1x_1 + c_2x_2$

Kita memerlukan dua buah persamaan lagi agar x_1, x_2, c_1, dan c_2 dapat ditentukan.

Dari penalaran bahwa kaidah trapesium sejati untuk fungsi tetap dan fungsi lanjar, maka penalaran ini juga kita perluas dengan menambahkan anggapan bahwa integrasinya juga sejati untuk:

$f(x) = x^2\ dan\ f(x) = x^3$

$f(x) = x^2 \rightarrow \int_{-1}^{1} xdx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_{x=-1}^{x=1} = \frac{2}{3} = c_1{x_1}^2 + c_2{x_2}^2$

$f(x) = x^3 \rightarrow \int_{-1}^{1} x^2dx = \frac{1}{4}x^4 \Big|_{x=-1}^{x=1} = 0 = c_1x^3 + c_2x^3$

Sekarang, kita sudah mempunyai empat buah persamaan simultan:

$c_1 + c_2 = 2$

$c_1x_1 + c_2x_2 = 0$

$c_1{x_1}^2 + c_2{x_2}^2 = \frac{2}{3}$

$c_1x^3 + c_2x^3 = 0$

Yang bila dipecahkan menghasilkan:

$c_1 = c_2 = 1$

$x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}577350269$

$x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -0{,}577350269$

Jadi, $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(-\frac{1}{\sqrt{3}})$

Dengan kaidah ini, menghitung integral f(x) di dalam selang [- 1, 1] cukup hanya dengan mengevaluasi nilai fungsi f di x =1/$\sqrt{3}$ dan di x=-1/$\sqrt{3}$.

Transformasi batas a sampai b

$\frac{\boldsymbol{x-a}}{\boldsymbol{b-a}} = \frac{\boldsymbol{t+1}}{\boldsymbol{1+1}}$

x= $\frac{t(b-a)+(b+a)}{2}$

$\frac{dx}{dt} = \frac{b-a}{2}\ maka\ dx = \frac{(b-a)}{2}dt$

$a < x < b$

$a < \frac{t(b-a)+(b+a)}{2} < b$

$-1 < t < 1$

$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{t(b-a)+(b+a)}{2}\ \frac{b-a}{2} dt = \frac{(b-a)}{2} \int_{-1}^{1} f\ \frac{t(b-a)+(b+a)}{2} dt$

$\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{1} f\ \frac{t(b-a)+(b+a)}{2} dt}$

Contoh:

Hitunglah integral dari L=$\int_0^1 x^2\, dx$

Penyelesaian:

$f(x) = x^2\ maka\ f\ \frac{t(b-a)+(b+a)}{2} = \left(\frac{t(b-a)+(b+a)}{2}\right)^2 =$

$\left(\frac{t(1-0)+(1+0)}{2}\right)^2 = \left(\frac{t+1}{2}\right)^2$, maka

$\int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{2} \int_{-1}^{1} f\ \frac{t(b-a)+(b+a)}{2} dt$

$\int_a^b f(x)dx = \frac{(1-0)}{2} \int_{-1}^{1} \left(\frac{t+1}{2}\right)^2 dt$

$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \left(\frac{t+1}{2}\right)^2 dt$

Integral gauss-legendre menggunakan dua titik:

$f(t) = \left(\frac{t+1}{2}\right)^2$

$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{{}^{1}/_{\sqrt{3}}+1}{2}\right)^2$

$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(-\frac{{}^{1}/_{\sqrt{3}}+1}{2}\right)^2$

$I= \int_{-1}^{1} f(t)dt = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$I= \int_{-1}^{1} f(t)dt = \left(\frac{{}^{1}/_{\sqrt{3}}+1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{{}^{1}/_{\sqrt{3}}+1}{2}\right)^2$

$I= \int_{-1}^{1} f(t)dt = 0{,}622008 + 0{,}044\,658 = 0{,}666667$

$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \left(\frac{t+1}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{2}\ (0{,}666667) = 0{,}333333$

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah dipaparkan maka dapat disimpulkan bahwa metode Romberg memiliki kesalahan cukup kecil, maka tidak salah jika metode Romberg menjadi metode paling bagus untuk integrasi numerik golongan selang yang sama (equally space) karena merupakan penyempurna dari metode-metode sebelumnya. Sedangkan Gauss-Legendre mendekati nilai eksak yang berarti nilai integrasi numerik sama dengan nilai eksak oleh karena itu metode ini sangat populer dalam penggunaannya. Sehingga dapat disimpulkan pada makalah ss ini inetgrasi numerik pada fungsi eksponensial yang dimodifikasi, metode Gauss-Legendre memiliki ketelitian yang lebih akurat dibandingkan dengan metode Romberg, bukan berarti metode Romberg adalah metode yang kurang bagus akan tetapi pada kasus ini metode Gauss-Legendre lebih unggul dari metode Romberg.

REFERENSI

Darmawan, R. N. (2015). *Integrasi Numerik Fungsi Eksponensial dengan Metode Romberg dan Gauss-Legendre*. 5–10.

Darmawan, R. N. (2016). Perbandingan Metode Gauss- Legendre, Gauss-Lobatto, dan Gauss-Kronrod pada Integrasi Numerik Fungsi Eksponensial. *JMPM: Jurnal Matematika Dan Pendidikan Matematika*, *1*(2), 99. https://doi.org/10.26594/jmpm.v1i2.596

Munir, R. (n.d.). *Integrasi Numerik Singularitas*. 1–60.

Radesa, A., . N., & Ginting, B. (2016). Integrasi Numerik Dengan Metode Kuadratur Gauss-Legendre Menggunakan Pendekatan Interpolasi Hermite Dan Polinomial Legendre. *Jurnal Matematika UNAND*, *5*(1), 148. https://doi.org/10.25077/jmu.5.1.148-153.2016

Yudianto, E. (2020). Modul integral. *Digital Repository Universitas Jember*, 1–38.