Jurnal Pustaka Cendekia Pendidikan
Volume 01, No. 02, Januari - Februari 2024, pp. 70-77
E-ISSN: 2988-7720
Website: https://pcpendidikan.org/index.php/jpcp

α-Anti Subgroup Fuzzy

Nelva Riza

Program Studi S1 Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Pahlawan Tuanku Tambusai, Jl. Tuanku Tambusai No. 23 Bangkinang Kota, Kab. Kampar, Provinsi Riau
Nelfariza62@gmail.com

Abstract

A fuzzy set over a set X is a function of x to a closed interval [0,1] and is a generalization of a strict set. In other words, a strict set is aspecial case of a fuzzy set, so that the properties of a spring set can definitely be expressed as a special case of a fuzzy set. Information collection method used is the study of literature. By proving the properties of A_α is the anti fuzzy subgroup of group G.
Keywords: Groups, Subgroups, Anti Subgroups Fuzzy.

Abstrak

Himpunan fuzzy atas suatu himpunan X merupakan suatu fungsi dari X ke interval tutup [0,1] dan merupakan generalisasi dari himpunan tegas. Dengan kata lain, himpunan tegas merupakan kasus khusus dari himpunan fuzzy, sehingga sifat yang ada pada himpunan tegas pasti dapat dinyatakan sebagai kasus khusus dari sifat himpunan fuzzy. Metode pengumpulan informasi yang digunakan adalah studi literatur. Dengan membuktikan sifat-sifat dari A_α adalah anti subgroup fuzzy dari grup G.
Kata Kunci: Grup, Subgroup, Anti Subgroup Fuzzy.

✉Corresponding author: Nelva Riza
Email Address: nelfariza62@gmail.com (Desa Ganting Damai, Kecamatan Salo, Kab.Kampar, Riau)
Received 07 January 2024, Accepted 13 January 2024, Published 20 January 2024

PENDAHULUAN

Grup merupakan suatu sistem matematika yang terdiri atas sebuah himpunan tak kosong dilengkapi dengan sebuah operasi biner yang memenuhi sifat assosiatif, memiliki elemen identitas, dan setiap elemennya memiliki invers. Suatu grup yang operasi binernya bersifat komutatif dinamakan grup komutatif. Kajian mengenai teori grup klasik kebanyakan dilakukan pada himpunan tegas.

Subgrup yaitu himpunan bagian tidak kosong dari suatu grup G dan merupakan grup terhadap operasi yang sama dengan grup G (Yasir et al., 2016). Konsep himpunan fuzzy merupakan perluasan dari konsep himpunan klasik yang pertama kali diperkenalkan oleh Lotfi A Zadeh. Zadeh memperkenalkan himpunan fuzzy yang didefinisikan sebagai suatu pemetaan dari himpunan tak kosong X ke interval tertutup [0,1] (Zadeh et al., 1965). Kajian mengenai konsep himpunan mulai berkembang pada sekitar tahun 1965 yang ditandai dengan adanya perluasan dari konsep himpunan tegas menjadi himpunan fuzzy (samar).

Beberapa aplikasi konsep himpunan *fuzzy* pada kehidupan nyata telah di bahas oleh para ahli. Pembahasan mengenai pembentukan sub-himpunan *fuzzy* pada suatu grup klasik dan penelitian mengenai penggunaan konsep himpunan *fuzzy* pada pembentukan ruang vektor dan matriks. Himpunan fuzzy atas suatu himpunan X merupakan suatu fungsi dari X ke interval tutup [0,1] dan merupakan generalisasi dari himpunan tegas. Dengan kata lain, himpunan tegas merupakan kasus khusus dari himpunan fuzzy, sehingga sifat yang ada pada himpunan tegas pasti dapat dinyatakan sebagai kasus khusus dari sifat himpunan fuzzy. (Rozi et al., 2014).

Setelah diperkenalkan, konsep himpunan *fuzzy* mengalami perkembangan. Para peneliti terus mendorong perkembangan konsep himpunan *fuzzy* baik secara teoritis maupun aplikasi. Salah satunya adalah Rosenfield yang menggabungkan konsep himpunan *fuzzy* dengan struktur grup yang kemudian memunculkan konsep grup *fuzzy* yang menjadi model awal dari bidang aljabar *fuzzy* dan kemudian konsep tersebut menjadi dasar dari penelitian model aljabar *fuzzy* lainnya seperti subgrup *fuzzy* dan anti subgrup *fuzzy* (Noor et al., 2020).

Konsep aljabar *fuzzy* mengalami perkembangan, pendefinisian - pendefinisian baru terus bermunculan, diantaranya adalah konsep anti *subset* α-*fuzzy* yang diperkenalkan oleh Sharma. Diberikan *A subgroup fuzzy* dari grup *G* dan $\boldsymbol{\alpha} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$. Dapat didefinisikan suatu pemetaan $\boldsymbol{A_\alpha}$ dari *G* ke selang [0,1] dengan $\boldsymbol{A_\alpha}$ (x) = max {A(x),1−α } maka $\boldsymbol{A_\alpha}$ juga merupakan *subgrup fuzzy* dan $\boldsymbol{A_\alpha}$ disebut α-anti *subgup fuzzy*. (Yasir et al., 2016)**.**

METODE

Dalam penelitianini, metode penelitian yang digunakan adalah penelitian kepustakaan (library research),yang merupakan rangkaian kegiatan yang berkaitan dengan pengumpulan data melalui sumber-sumber pustaka, dan metode search engine yang merupakan pencarian di internet. secara umum tulisan ini memuat latar belakang penulisan. Terdapat gambaran umum dari latar belakang tentang permasalahan yang dibahas. Kemudian disajikan teori-teori yang membantu penulisan dalam menyelesaikan masalah yang dipaparkan sebelumnya, sehingga pada pembahasan selanjutnya merupakan pembahasan keseluruhan tulisan ini yang memberikan penjelasan tentang α-antisubgrup fuzzy. Semua penulisan sudah didasari pada artikel maupun jurnal yang berkaitan dengan materi penulisan.

HASIL DAN DISKUSI

Grup

Defenisi 2.1.1

Grup G merupakan sistem aljabar yang terdiri atas himpunan tak kosong G dan suatu operasi biner yang didefinisikan pada G serta memenuhi aksioma-aksioma berikut ini :

1. $\forall\, h, k \in G$ berlaku $h * k \in G$
2. Operasi biner bersifat asosiatif, yaitu $(h * k) * j = h * (k * j), \forall h, k, j \in G$
3. Terdapat elemen *e* disebut elemen identitas $e \in G$ sehingga $h * e = e * h = h,\ \forall h \in G$
4. $\forall h \in G, \exists\, h^{-1} \to h * h^{-1} = h^{-1} * h = e$

Contoh 2.1.1

Himpunan bilangan bulat Z dengan operasi penjumlahan biasa merupakan grup

Pembahasan:

Untuk membuktikan bahwa himpunan bilangan bulat Z dengan operasi penjumlahan biasa merupakan grup maka harus memenuhi keempat aksioma berikut:

1. Untuk membuktikan Z bersifat tertutup terhadap operasi +
   Ambil sebarang $a, b \in Z$. Jumlah dua bilangan bulat merupakan bilangan bulat, sehingga $a + b \in Z$. Jadi, Z bersifat tertutup terhadap operasi +
2. Untuk membuktikan operasi + bersifat asosiatif
   Ambil sebarang $a, b, c \in Z$. Perhatikan bahwa $(a + b) + c = a + (b + c)$. jadi, operasi + bersifat asosiatif
3. Untuk membuktikan (Z,+) mempunyai elemen identitas
   Terdapat $0 \in Z$ sehingga untuk setiap $a \in Z$ berlaku $a + 0 = a$ dan $0 + a = a$. Jadi, 0 merupakan elemen identitas pada $(Z, +)$
4. Untuk membuktikan setiap $a \in Z$ mempunyai invers
   Untuk setiap $a \in Z$ terdapat $-a \in Z$ sehingga $a + (-a) = 0$ dan $(-a) + a = 0$. Jadi, setiap unsure di Z mempunyai invers.

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa (Z,+) merupakan grup.

Subgrup

Defenisi 2.3.1

Misal $(G,*)$ adalah grup dan $Z \in G$, jika $(Z,*)$ membentuk grup, maka $(Z,*)$ adalah subgroup dari $(G,*)$

Contoh 2.3.1

(Z,+) adalah grup. Misal $A_2 = \{xlx = 3n, n \in Z\}$. sehingga $A_2 \in Z$. karena $(A_2, +)$ merupakan grup, maka $(A_2, +)$ adalah subgroup dari grup (Z,+)

Subgroup Fuzzy

Definisi 2.3.1

Jika diberikan X sebarang himpunan pemetaan fungsi dari $A: X \to [0,1]$ disebut sebagai subset fuzzy dari X

Defenisi 2.3.2

Misalkan A subset fuzzy dari grup G dan $\alpha \in [0,1]$, maka A_α disebut α-anti subgroup fuzzy dari G dan didefenisikan sebagai $A_\alpha = maks\{A(x), 1 - \alpha\}$

Defenisi 2.3.3

Misalkan A merupakan himpunan bagian dari fuzzy pada grup G. Maka A dikatakan subgrup fuzzy pada grup G jika untuk semua $x, y \in G$ berlaku

1. $A(x, y) \geq minimal\ \{A(x), A(y)\}$

2. $A(x^{-1}) = A(x)$

Contoh 2.3.1

$A_1 = \{xl0 < x > 2, x \in Z\}$ dan $A_2 = \{yl0 \leq y \geq 2, y \in Z\}$ adalah subgroup dari $(Z,\times)$. Dengan $A(x) = x + 2$ maka A adalah subgroup fuzzy pada $(Z,\times)$.

Pembahasan:

Berdasarkan defenisi 2.3.3 untuk membuktikan A adalah subgroup fuzzy pada $(Z,\times)$, maka harus memenuhi 2 aksioma berikut:

1. $A(x, y) \geq minimal\,\{A(x), A(y)\}$
2. $A(x^{-1}) = A(x)$

Tabel 1.

x	y	x.y	*A(x.y)*	A(x)	A(y)	*Min{A(x),A(y)}*
1	0	0	*2*	3	2	*2*
1	1	1	*3*	3	3	*3*
1	2	2	*4*	3	4	*3*

Tabel 2

x	x^{-1}	*A(x)*	$A(x^{-1})$
1	1	*1*	*1*

Berdasarkan tabel 1 di atas diperoleh bahwa $A(x, y) \geq minimal\,\{A(x), A(y)\}$. Dan berdasarkan tabel 2 di atas di peroleh bahwa $A(x^{-1}) = A(x)$. Maka kedua aksioma tersebut terpenuhi dan terbukti bahwa A adalah subgroup fuzzy pada $(Z,\times)$

Defenisi 2.3.4

Misalkan A adalah sebuah himpunan bagian *fuzzy* pada grup G. Maka A dikatakan subgroup anti *fuzzy* pada grup G jika untuk semua $x, y \in G$, berlaku

1. $A(x, y) \leq maks\,\{A(x), A(y)\}$
2. $A(x^{-1}) = A(x)$

Contoh 2.3.2

$A_1 = \{xl0 < x > 2, x \in Z\}$ dan $A_2 = \{yl0 \leq y \geq 2, y \in Z\}$ adalah subgroup dari $(Z,\times)$. Dengan $A(x) = x + 2$ maka A adalah anti subgroup fuzzy pada $(Z,\times)$.

Pembahasan:

Berdasarkan defenisi 2.3.4 untuk membuktikan A adalah anti subgroup fuzzy pada $(Z,\times)$, maka harus memenuhi 2 aksioma berikut:

1. $\mathrm{A(x, y)} \leq \mathrm{maks}\,\{\mathrm{A(x), A(y)}\}$
2. $\mathrm{A(x^{-1})} = \mathrm{A(x)}$

Tabel 3.

x	y	x.y	*A(x.y)*	A(x)	A(y)	*Maks{A(x),A(y)}*
1	0	0	*2*	3	2	*3*
1	1	1	*3*	3	3	*3*
1	2	2	*4*	3	4	*4*

Tabel 4.

x	x^{-1}	*A(x)*	$A(x^{-1})$
1	1	*1*	*1*

Berdasarkan tabel 1 di atas diperoleh bahwa $A(x,y) \leq maks\ \{A(x), A(y)\}$. Dan berdasarkan tabel 2 di atas di peroleh bahwa $A(x^{-1}) = A(x)$. Maka kedua aksioma tersebut terpenuhi dan terbukti bahwa A adalah anti subgroup fuzzy pada $(Z,\times)$

Defenisi 2.3.5

Komplemen dari himpunan fuzzy A pada himpunan X, dinotasikan A^c dan didefenisikan sebagai $A^c(x) = 1 - A(x)$

Definisi 2.3.6

Diberikan A subset fuzzy dari grup G, dan $\alpha \in [0,1]$, kemudian A disebut α-anti subgroup fuzzy dari G $\forall x, y \in G$ berlaku:

1. $A_\alpha(x,y) \leq maks\ \{A_\alpha(x), A_\alpha(y)\}$
2. $A_\alpha(x^{-1}) = A_\alpha(x)$

Teorema 3.1

Jika H adalah subgroup fuzzy pada grup G jika dan hanya jika H^c adalah subgroup anti fuzzy

Bukti:

Pembuktian dari kiri ke kanan

Diketahui H subgroup fuzzy di G. Akan dibuktikan H^c adalah subgroup anti fuzzy. Berdasarkan defenisi 2.3.3 untuk membuktikan H^c subgroup anti fuzzy di G harus memenuhi 2 kondisi berikut:

1. $H(x,y) \geq minimal\{H(x), H(y)\}$ (*berdasarkan defenisi 2.3.3(1))*

   $-H(x,y) \leq -minimal\ \{H(x), H(y)\}$ (*kalikan kedua ruas dengan -1)*

   $1 - H(x,y) \leq 1 - minimal\ \{H(x), H(y)\}$ (*tambahkan kedua ruas +1)*

   $H^c(x,y) \leq maks\{1 - H(x), 1 - H(y)\}$ *(berdasarkan defenisi 2.3.5)*

   $H^c(x,y) \leq maks\{H^c(x), H^c(y)\}$ ………………..*(1)*
2. $H(x)^{-1} = H(x)$*(berdasarkan defenisi 2.3.3(2))*

$-H(x)^{-1} = -H(x)$*(kalikan kedua ruas dengan -1)*

$1 - H(x)^{-1} = 1 - H(x)$ *(tambahkan kedua ruas +1)*

$H^c(x)^{-1} = H^c(x)$ *(berdasarkan defenisi 2.3.5)*

$H^c(x)^{-1} = H^c(x)$*..(2)*

Berdasarkan defenisi 2.3.4, maka dari persamaan (1) dan (2) dapat disimpulkan bahwa H^c adalah subgroup anti fuzzy pada grup G

Pembuktian dari kanan ke kiri

Diketahui H^c adalah subgroup anti fuzzy. Akan dibuktikan H adalah subgroup fuzzy pada grup G. Berdasarkan defenisi 2.3.4, untuk membuktikan H subgroup fuzzy di G harus memenuhi 2 kondisi berikut:

1. $H^c(xy) \leq maks\{H^c(x), H^c(y)\}$ *(berdasarkan defenisi 2.3.4(1))*

   $1 - H(x, y) \leq maks\ \{1 - H(x), 1 - H(y)\}$ *(berdasarkan defenisi 2.3.5)*

   $1 - H(x, y) \leq 1 - minimal\ \{H(x), H(y)\}$

   $-H(x, y) \leq -minimal\ \{H(x), H(y)\}$ *(tambahkan kedua ruas -1)*

   $H(x, y) \geq minimal\{H(x), H(y)\}$ *(kalikan kedua ruas dengan -1)*

   $H(x, y) \geq minimal\{H(x), H(y)\}$....................(1)

2. $H^c(x)^{-1} = H^c(x)$ *(berdasarkan defenisi 2.3.4(2))*

   $1 - H(x)^{-1} = 1 - H(x)$ *(berdasarkan defenisi 2.3.5)*

   $-H(x)^{-1} = -H(x)$ *(tambahkan kedua ruas -1)*

   $H(x)^{-1} = H(x)$ *(kalikan kedua ruas dengan -1)*

   $H(x)^{-1} = H(x)$.......................................(2)

Berdasarkan defenisi 2.3.3 maka dari persamaan (1) dan (2) dapat di simpulkan bahwa H adalah subgroup fuzzy pada G.

Teorema 3.2

Jika A_α adalah anti subgroup fuzzy dari grup G maka $\forall x, y \in G$ berlaku

1. $A_\alpha(e) = A_\alpha(x)$
2. Jika $A_\alpha(xy^{-1}) = A_\alpha(e).\ maka\ A_\alpha(x) = A_\alpha(y)$

Bukti:

1. Diambil sebarang $x \in G$, karena G grup dan A_α anti subgroup fuzzy, maka diperoleh

   $A_\alpha(e) = A_\alpha(xx^{-1})$ $(e = (xx^{-1})$)

   $\leq maks\ \{A_\alpha(x), A_\alpha(x^{-1})\}$ (berdasarkan defenisi 2.3.4(1))

   $\leq maks\ \{A_\alpha(x), A_\alpha(x)\}$ (berdasarkan defenisi 2.3.4(2))

   $A_\alpha(e) \leq A_\alpha(x)$

   Jadi, terbukti bahwa $A_\alpha(e) \leq A_\alpha(x)\ \forall x \in G$

2. Diambil sebarang $x \in G$ karena G grup dan A_α anti subgroup fuzzy, maka diperoleh

$A_\alpha(x) = A_\alpha(xe)$
$= A_\alpha(x(y^{-1}y))$ $\quad (e = (y^{-1}y))$
$= A_\alpha((xy^{-1})y)$ $\quad (sifat\ asosiatif)$
$\leq maks\ \{A_\alpha(xy^{-1}), A_\alpha(y)\}$ $(berdasarkan\ defenisi$ 2.3.6)
$= maks\ \{A_\alpha(e), A_\alpha(y)\}$
$A_\alpha(x) = A_\alpha(y)$
Jadi, terbukti bahwa $A_\alpha(x) = A_\alpha(y)$

Teorema 3.3

Jika A_α merupakan anti subgroup fuzzy dari grup G, maka A_α merupakan α-anti subgroup fuzzy

Bukti:

Diketahui A_α merupakan anti subgroup fuzzy dari grup G. akan dibuktikan maka A_α merupakan α-anti subgroup fuzzy harus memenuhi 2 kondisi berikut:

1. $A_\alpha(xy) =$ maks {A(xy), 1-α} (berdasarkan defenisi 2.3.2)
   $\leq maks\ \{maks$ {A(xy), 1-α}}
   $\leq maks\ \{maks\ [A(x)A(y)], 1-\alpha\}$
   $\leq maks\ \{maks\ A(x), 1-\alpha\}, \{maks\ A(y), 1-\alpha\}$, (sifat distributor)
   $\leq maks\ \{A_\alpha(x), A_\alpha(y)\}$ (berdasarkan defenisi 2.3.2)
   $A_\alpha(xy) \leq maks\ \{A_\alpha(x), A_\alpha(y)\}$…………………………..(1)
2. $A_\alpha(x^{-1}) = maks\ \{A(x^{-1}), 1-\alpha\}$ (berdasarkan defenisi 2.3.2)
   $= maks\ \{A(x), 1-\alpha\}$ (berdasarkan defenisi 2.3.4(2))
   $= A_\alpha(x)$ (berdasarkan defenisi 2.3.2)
   $A_\alpha(x^{-1}) = A_\alpha(x)$……………………………………..(2)

Berdasarkan defenisi 2.3.6, maka dari persamaan (1) dan (2) dapat disimpulkan bahwa A_α merupakan α-anti subgroup fuzzy.

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan diatas diperoleh kesimpulan sebagai berikut :

1. Terbukti bahwa jika H adalah subgroup fuzzy pada grup G jika dan hanya jika H^c adalah subgroup anti fuzzy.
2. Terbukti bahwa jika A_α adalah anti subgroup fuzzy dari grup G maka $\forall x, y \in G$ berlaku:
   a. $A_\alpha(e) = A_\alpha(x)$
   b. Jika $A_\alpha(xy^{-1}) = A_\alpha(e).\, maka\ A_\alpha(x) = A_\alpha(y)$
3. Terbukti bahwa jika A_α merupakan anti subgroup fuzzy dari grup G, maka A_α merupakan α-anti subgroup fuzzy.

REFERENSI

Fraleigh, J.B. 2003. A First Course in Abstract Algebra. Edisi ke-7. Addison Wasley Publishing Company, New York.

Jian, T & Yunfei, Y. 2012. Correspondence Theorem for Anti L-fuzzy Normal Subgroup. International Journal of Computational and Mathematical Sciences. 6:192-194.

Judson, Thomas W. 2009. Abstact Algebra Theory and Applications. Stephen F. Austin State University, Texas.

Malik, DS, John N.M, M.K. Sen. 2007. Introduction to Abstract Algebra. Scientific Word, United States.

Mordeson, J.N, Bhutani, K.R, dan Rosenfeld, A., 2005. Fuzzy Groups Theory. New York: Springer Berlin Heidelberg.

Noor, F., Abdurrahman, S., & Hijriati, N. (2020). ANTI SUBGRUP α-FUZZY. *Jurnal Matematika Murni Dan Terapan "Epsilon," 14*(1), 10–20.

Rosenfeld, Azriel. 1971. Fuzzy Groups. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 35:512-517.

Rozi, F., Wardayani, A., & Suroto. (2014). SUBGRUP FUZZY ATAS SUATU GRUP Fatkhur. *JMP*, *6*(2002), 33–44.

Sharma, P.K. 2012. α- Anti Fuzzy Subgroups. International Review of Fuzzy Mathematics, 7:47-58.

Yasir, A., Abdurrahman, S., & nurul huda. (2016). Anti subgrup fuzzy. *Jurnal Matematika Murni Dan Terapan "Epsilon," 10*(2), 48–54.

Zadeh, L. A., Introduction, I., & Navy, U. S. (1965). *Fuzzy Sets* * -. *353*, 338–353.