

Teorema Ptolemy pada Segi Empat Siklik

Yuni Wulan Dari

Program Studi S1 Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Pahlawan Tuanku
Tambusai, Jl. Tuanku Tambusai No. 23 Bangkinang Kota, Kab. Kampar, Provinsi Riau
yuniwulanadari1106@gmail.com

Abstract

Ptolemy's theorem, taken from the name of the Ancient Greek Philosopher Claudius Ptolemy (170 – 100 BC). Ptolemy's theorem is the relationship of 4 sides with 2 diagonals of Quadrilaterals in a circle. What is Quadrilateral? We have known Quadrilateral since elementary school. Square, rectangle, trapezoid, parallelogram, kite, rhombus are all Quadrilaterals. So Quadrilateral is a flat shape that has 4 sides. In Euclidean geometry, Ptolemy's theorem is the relationship between the four sides and two diagonals of a cyclic quadrilateral (a quadrilateral whose vertices lie on the same circle). This theorem is named after the Greek astronomer and mathematician, Ptolemy (Claudius Ptolemaeus). Ptolemy's theorem verbally can be stated as follows: "If a quadrilateral lies in a circle, the product of its diagonals is equal to the sum of the products of the pairs of opposite sides." In addition, the opposite of Ptolemy's theorem is also true, as follows: "In a quadrilateral, if the sum of the products of two pairs of opposite sides is equal to the product of the diagonals, then the quadrilateral can be described in a circle".

Keywords: Geometry, Cyclic Quadrilateral, Ptolemy's Theorem

Abstrak

Teorema Ptolemy, diambil dari nama Filsuf Yunani Kuno Claudius Ptolemy (170 – 100 SM). Teorema Ptolemy adalah hubungan 4 sisi dengan 2 diagonal dari Quadrilateral didalan lingkaran. Apa itu Quadrilateral? Quadrilateral sebenarnya sudah kita kenal sejak SD. Persegi, persegi panjang, trapesium, jejergenjang, layang-layang, belah ketupat, semuanya adalah Quadrilateral. Jadi Quadrilateral adalah bangun datar yang memiliki 4 sisi. Dalam geometri Euclidean, teorema Ptolemy adalah hubungan antara empat sisi dan dua diagonal dari segiempat siklik (segiempat yang titik sudutnya terdapat pada lingkaran yang sama). Teorema ini dinamai dengan nama astronom dan matematika Yunani, Ptolemeus (Claudius Ptolemaeus). Teorema Ptolemy secara verbal dapat dinyatakan sebagai berikut: "Jika segi empat terletak dalam lingkaran maka hasil kali dari diagonal-diagonalnya sama dengan jumlah dari hasil kali dari pasang sisi yang berhadapan". Selain itu, kebalikan dari teorema Ptolemy juga benar, sebagai berikut: "Segiempat, jika jumlah hasil kali dari dua pasang sisi yang berhadapan adalah sama dengan hasil kali dari diagonal-diagonalnya, maka segiempat dapat dilukiskan pada sebuah lingkaran".

Kata Kunci: Geometri, Segi Empat Siklik, Teorema Ptolemy

Copyright (c) 2024 Yuni Wulan Dari

✉Corresponding author: Yuni Wulan Dari

Email Address: yuniwulanadari1106@gmail.com (Jl. Tuanku Tambusai No. 23 Bangkot, Kab. Kampar, Riau)

Received 18 August 2024, Accepted 24 August 2024, Published 30 August 2024

PENDAHULUAN

Geometri berasal dari kata latin "Geometrein" yaitu geo yang artinya tanah dan metrein yang artinya pengukuran. Geometri dapat diartikan sebagai Ilmu Ukur. Geometri didefinisikan juga sebagai cabang Matematika yang mempelajari titik, garis, bidang dan benda-benda ruang serta sifat-sifatnya, ukuran-ukurannya dan hubungannya satu sama lain. Geometri yang pertama kali muncul dari matematikawan yang bernama Euclid sekitar tahun 330 SM adalah geometri Euclid. Dalam bukunya yang berjudul "The Elements" geometri Euclid dijelaskan mengenai definisi, postulat, aksioma dan dalil.

Dari Geometri Euclid dapat diambil sarinya berupa dua Geometri yang berlainan dalam dasar logikanya, pengertian pangkalnya dan aksiomanya. Salah satunya adalah Geometri Absolut atau Geometri Netral. Geometri Absolut pertama kali diperkenalkan oleh seorang matematikawan yang bernama Y. Bolyai (1802-1860) dari Hongaria. Sedangkan pada geometri netral dijelaskan bahwa melalui suatu titik di luar garis dapat dibuat garis yang sejajar dengan garis yang diketahui, tetapi ada satu hal yaitu melalui sebuah titik tersebut tidak perlu ada tepat satu garis yang sejajar dengan garis yang diketahui. Geometri netral dilengkapi dengan sistem aksioma keantaraan, sistem aksioma urutan, dan sistem aksioma kekongruenan tentang ruas garis, sudut, dan segitiga. Geometri netral hanya berlandaskan empat postulat awal Euclid dan mengabaikan postulat kelima atau postulat kesejajaran Euclid. Akan tetapi dalam geometri netral tetap dikenal istilah kesejajaran garis karena muncul pernyataan tentang garis yang sejajar melalui pembuktian suatu teorema. Salah satu teorema pada geometri adalah Teorema Ptolemy.

Claudio Ptolemy atau hanya Ptolemy, adalah salah satu tokoh intelektual terpenting di awal era kita. Dia tinggal dan bekerja di Alexandria di mana dia juga diyakini lahir pada tahun 100 Masehi. Dia berlatih terutama sebagai astronom, tetapi juga melakukan banyak studi yang berkaitan dengan geografi, matematika, atau astrologi. Dia bahkan membuat risalah yang didedikasikan untuk salah satu hobi besarnya, musik. Tetapi jika Claudio Ptolemeus terkenal karena sesuatu, itu karena teori geosentrisnya yang dikenal sebagai *Model Ptolemeus ...* Teori ini, yang menunjukkan bahwa Bumi adalah pusat alam semesta dan semua bintang berputar mengelilinginya, berdampak besar dan berlaku sampai munculnya teori heliosentris Copernicus di abad ke-16. Ia menciptakan perpustakaan besar di Alexandria yang dianggap museum dan ia ada pencita teori teorema Ptolemy.

Salah satu Teorema tertua adalah Teorema Ptolemy, diambil dari nama Filsuf Yunani Kuno Claudius Ptolemy (170 – 100 SM). Teorema Ptolemy adalah hubungan 4 sisi dengan 2 diagonal dari Quadrilateral di dalam lingkaran. Apa itu Quadrilateral? Quadrilateral sebenarnya sudah kita kenal sejak SD. Persegi, persegi panjang, trapesium, jajargenjang, layang-layang, belah ketupat, semuanya adalah Quadrilateral. Jadi Quadrilateral adalah bangun datar yang memiliki 4 sisi.

Dalam geometri Euclidean, teorema Ptolemy adalah hubungan antara empat sisi dan dua diagonal dari segiempat siklik (segiempat yang titik sudutnya terdapat pada lingkaran yang sama). Teorema ini dinamai dengan nama astronom dan matematika Yunani, Ptolemeus (Claudius Ptolemaeus). Teorema Ptolemy secara verbal dapat dinyatakan sebagai berikut: “Jika segi empat terletak dalam lingkaran maka hasil kali dari diagonal-diagonalnya sama dengan jumlah dari hasil kali dari pasang sisi yang berhadapan”. Selain itu, kebalikan dari teorema Ptolemy juga benar, sebagai berikut: “Segiempat, jika jumlah hasil kali dari dua pasang sisi yang berhadapan adalah sama dengan hasil kali dari diagonal-diagonalnya, maka segiempat dapat dilukiskan pada sebuah lingkaran”.

METODE

Jenis penelitian ini adalah verificative research yaitu jenis penelitian yang bertujuan untuk menguji suatu teori atau hasil penelitian sebelumnya, sehingga diperoleh hasil yang memperkuat atau menggugurkan teori atau hasil penelitian sebelumnya.

HASIL DAN DISKUSI

Pengertian Teorema Ptolemy

Ptolemy masih terkait dengan segi-empat siklik. Teorema ini membahas tentang hubungan antara jumlah dua sisi yang bersebelahan dengan hasil kali diagonal dari suatu segi-empat siklik. Teorema ini sangat mudah digunakan, misalnya untuk menentukan nilai $\sin(x + y)$ yang dalam buku sekolah menengah buktinya sangat panjang. Akan tetapi disini akan diberikan bukti yang cukup sederhana.

Teorema 6.4.1 (Teorema Ptolemy)

Jika $ABCD$ sebarang segi-empat yang berada pada suatu lingkaran, maka jumlah duapasang sisi yang bersebelahan adalah sama dengan hasil kali diagonalnya.

Bukti : Pada diagonal BD buat titik M sehingga

$\angle ACB = \angle MCD$. Karena $\angle BAC$ dan $\angle BDC$ menghadap busur yang sama, maka $\angle BAC = \angle BDC$. Yang mengakibatkan $\angle DNC = \angle ABC$, jadi $\triangle ABC \sim \triangle DMC$, sehingga

$$\frac{CD}{MD} = \frac{AC}{AB}$$

Atau

$$AB \times CD = AC \times MD \quad (6.4.1)$$

selanjutnya karena

$\angle ACB = \angle MCD$, maka $\angle BCM = \angle ACD$

dan karena

$\angle DAC = \angle DBC = \angle MBC$ (menghadap busur yang sama),

ini mengakibatkan $\triangle BCM \sim \triangle ACD$, sehingga

$$\frac{BC}{BM} = \frac{AC}{AD}$$

$$AD \times BC = AC \times BM \quad (6.4.2)$$

Dengan menjumlahkan persamaan (6.4.1) dan (6.4.2) diperoleh:

$$AB \times CD + AD \times BC = AC \times MD + AC \times BM = AC(MD + BM) = AC \times BD$$

Bukti 2: Misalkan $ABCD$ segi-empat siklik, perhatikan gambar 6.4.2. Kontruksi E sehingga

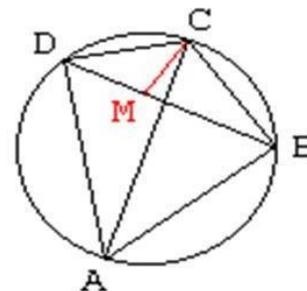
$\triangle CAD \cong \triangle CEB$, yang mengakibatkan ,

$$\frac{CE}{CA} = \frac{CB}{CD} = \frac{BE}{DA}$$

Sehingga diperoleh .

$$BE = \frac{CB \times DA}{CD} \quad (6.4.3)$$

Kita juga dapat menunjukkan bahwa



$$\angle ECA = \angle BCD$$

Sehingga didapat

$$\frac{CD}{CA} = \frac{CB}{CE}$$

Kemudian tunjukkan pula bahwa $\triangle ECA \sim \triangle BCD$ sehingga

$$\frac{EA}{BD} = \frac{CA}{CD}$$

Jadi

$$EA = \frac{CA \times DB}{CD}. \quad (6.4.4)$$

Sebagai ingatan bahwa jika ABCD siklik, maka

$$\angle CBE + \angle ABC = \angle CDA + \angle ABC = 180^\circ.$$

Tapi jelas ini akan menyebabkan A, B dan E segaris yang berarti $AB + BA = AE$. Jadi dari (6.4.3) dan (6.4.4) kita peroleh

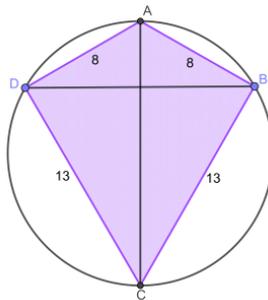
$$\frac{CA \times DB}{CD} = AB + \frac{CB \times DA}{CD}$$

Maka diperoleh

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$$

Contoh Soal Teorema Ptolemy:

Titik A, B, C, dan D terletak pada sisi lingkaran sehingga keempat titik ini membentuk bangun layang-layang dengan $AB=DA=8$ cm dan $BC=CD=13$ cm. Tentukan luas layang-layang ABCD tersebut.



Penyelesaian:

Luas Layang-layang dinyatakan oleh $L = \frac{AC \times BD}{2}$

Berdasarkan Teorema Ptolemy, kita peroleh

$$AC \times BD = AB \times CD + BC \times DA$$

$$\frac{AC \times BD}{2} = \frac{AB \times CD + BC \times DA}{2}$$

$$L = \frac{8 \times 13 + 8 \times 13}{2}$$

$$L = 8 \times 13$$

$$= 104 \text{ cm}^2$$

Jadi, luas layang-layang ABCD adalah 104 cm^2

KESIMPULAN

Teorema Ptolemy adalah hubungan antara empat sisi dan dua diagonal dari segiempat siklik (segiempat yang titik sudutnya terdapat pada lingkaran yang sama). Teorema ini dinamai dengan nama astronom dan matematika Yunani Kuno Claudius Ptolemy (170 – 100 SM). Teorema Ptolemy secara verbal dapat dinyatakan sebagai berikut: “Jika segi empat terletak dalam lingkaran maka hasil kali dari diagonal-diagonalnya sama dengan jumlah dari hasil kali dari pasang sisi yang berhadapan”.

Dengan rumus:

$$AB.CD + AD.BC = AC.BD$$

REFERENSI

Mashadi. (2018). *Buku Geometri Lanjut*.

Ording, P. (2019). Geometric. 99 Variations on a Proof, 141–142.
<https://doi.org/10.2307/j.ctvc77m52.64>

Sabila, I. N., & Lestari, H. P. (2016). *Kajian Segiempat Tali Busur dan Segiempat Garis Singgung pada Satu Lingkaran*. 1–11.

SAMSUMARLIN, S. (2018). Segitiga Dan Segiempat Pada Geometri Datar Euclid Cevian Segitiga Dan Segiempat Siklik. *Edumaspul: Jurnal Pendidikan*, 1(1), 15–22.
<https://doi.org/10.33487/edumaspul.v1i1.36>.