

Teorema Double Butterfly

Nur Azira

Program Studi Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Pahlawan Tuanku Tambusai,
Jl. Tuanku Tambusai No.23, Bangkinang, Kec. Bangkinang, Kabupaten Kampar, Riau
nurazira030302@gmail.com

Abstract

The butterfly theorem was first introduced by W.G Homer in 1815 in a gentlemen's diary. Many mathematicians make developments and variations of these theorems, for example the butterfly on circle theorem. In 1976 a mathematician named Dixon Jones made a variation on the development of the butterfly theorem on circles which was then called the double butterfly theorem on circles. In 1990 the double butterfly theorem was again discussed by a mathematician named Larry Hoehn. This theorem is called the double butterfly theorem because the contents of this theorem, when described, form four triangles that resemble two pairs of butterfly wings.

Keywords: Double Butterfly Theorem, Circle, Triangle

Abstrak

Teorema *Butterfly* pertama kali diperkenalkan oleh W. G Horner pada tahun 1815 dalam buku *gentlemen's Diary*. Banyak ilmuwan matematika membuat pengembangan beserta variasi dari teorema tersebut, misalnya Teorema *Butterfly* pada lingkaran. Pada tahun 1976 seorang ilmuwan matematika yang bernama Dixon Jones membuat variasi pengembangan Teorema *Butterfly* pada lingkaran yang kemudian dinamakan Teorema *Double Butterfly* pada lingkaran. Pada tahun 1990 Teorema *Double Butterfly* kembali dibahas oleh ilmuwan matematika yang bernama Larry Hoehn. Teorema ini dinamakan Teorema *Double Butterfly* karena isi dari teorema ini jika digambarkan terbentuk empat buah segitiga yang menyerupai dua pasang sayap kupu-kupu.

Kata Kunci: Teorema Double Butterfly, Lingkaran, Segitiga

Copyright (c) 2024 Nur Azira

✉ Corresponding author: Nur Azira

Email Address: nurazira030302@gmail.com (Jl. Tuanku Tambusai No.23, Bangkinang, Kab.Kampar, Riau)

Received 19 October 2024, Accepted 25 October 2024, Published 31 October 2024

PENDAHULUAN

Teorema *Butterfly* pertama kali diperkenalkan oleh W. G Horner pada tahun 1815 dalam buku *gentlemen's Diary*. Banyak ilmuwan matematika membuat pengembangan beserta variasi dari teorema tersebut, misalnya Teorema *Butterfly* pada lingkaran. Pada tahun 1976 seorang ilmuwan matematika yang bernama Dixon Jones membuat variasi pengembangan Teorema *Butterfly* pada lingkaran yang kemudian dinamakan Teorema *Double Butterfly* pada lingkaran. Pada tahun 1990 Teorema *Double Butterfly* kembali dibahas oleh ilmuwan matematika yang bernama Larry Hoehn. Teorema ini dinamakan Teorema *Double Butterfly* karena isi dari teorema ini jika digambarkan terbentuk empat buah segitiga yang menyerupai dua pasang sayap kupu-kupu.

Pada gambar 1 misalkan \overline{PQ} adalah sebuah tali busur dari sebuah lingkaran, dan misalkan *Butterfly* "R" dan *Butterfly* "S" berada pada lingkaran sehingga sayap-sayapnya memotong PQ di R_4 , R_3 , R_2 , R_1 dan S_1 , S_2 , S_3 , S_4 . Jika $\overline{PR_1} = \overline{QS_1}$, $\overline{PR_2} = \overline{QS_2}$, dan $\overline{PR_3} = \overline{QS_3}$ maka $\overline{PR_4} = \overline{QS_4}$.

Solusi Teorema *Double Butterfly* pada lingkaran dapat dijabarkan dengan berbagai sumber referensi seperti Teori Greg, *Two Butterfly*, Analitik Geometri dan Teorema Essays. Beberapa

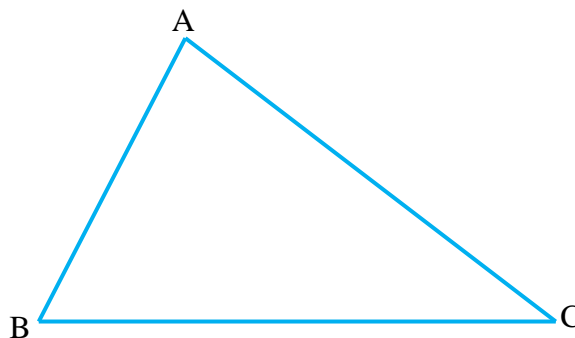
alternatif buktinya dapat dilakukan dengan menggunakan Lema Haruki. Berdasarkan literatur yang digunakan, penulis tertarik untuk membahas dan menyajikan permasalahan ini dalam bentuk makalah dengan judul “**Beberapa Alternatif Pembuktian Teorema Double Butterfly**” yang merupakan reiew dari jurnal yang berjudul “*A New Proof DoubleButterfly Theorem*” oleh Larry Hoehn (1990) dan “*A Double ButterflyTheorem*” oleh Dixon Jones (1976).

METODE

Secara umum tulisan ini memuat latar belakang penulisan. Terdapat gambaran umum dari latar belakang tentang permasalahan yang dibahas. Kemudian disajikan teori-teori yang membantu penulisan dalam menyelesaikan masalah yang dipaparkan sebelumnya, sehingga pada pembahasan selanjutnya merupakan pembahasan keseluruhan tulisan ini yang memberikan penjelasan tentang konsep-konsep dasar dan teorema double butterfly. Semua penulisan sudah didasari pada artikel maupun jurnal yang berkaitan dengan materi panulisan.

HASIL DAN DISKUSI

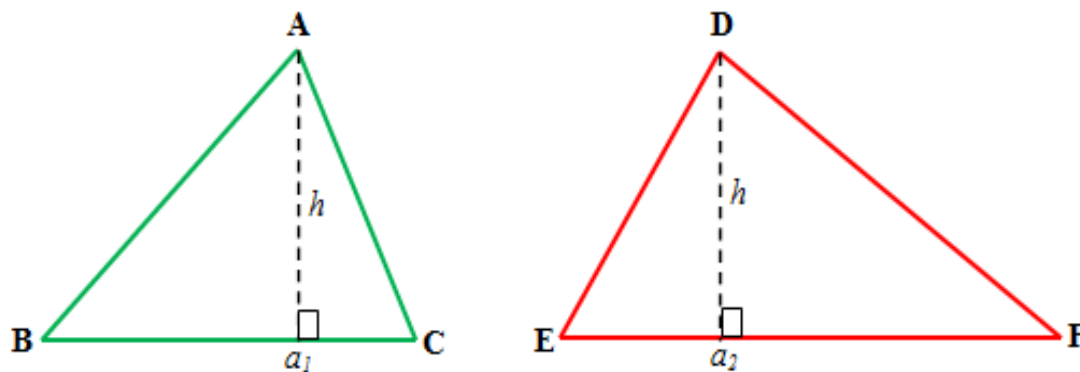
Segitiga merupakan suatu bangun datar yang mempunyai tiga buah sisi dan tiga buah sudut. Pada sub bab ini akan dibahas mengenai pengertian dari segitiga dan luas segitiga. **Definisi 2.1.1** Misalkan A, B dan C adalah titik-titik yang tidak segaris, sehingga gabungan dari segmen \overline{AB} , \overline{AC} , dan \overline{BC} disebut segitiga dan dinotasikan dengan ΔABC .



Gambar 1. Segitiga ABC

Pada gambar 1, titik-titik A, B dan C disebut titik puncak dan segmen garis \overline{AB} , \overline{AC} dan \overline{BC} disebut sisi. Setiap ΔABC mempunyai tiga sudut yaitu $\angle BAC$, $\angle ABC$ dan $\angle ACB$ atau bisa ditulis dengan $\angle A$, $\angle B$ dan $\angle C$. Seperti bangun datar lainnya, segitiga juga mempunyai ukuran luas. Berikut ini akan diberikan teorema mengenai luas segitiga.

Teorema 2.1.5 Jika dua buah segitiga mempunyai tinggi yang sama maka perbandingan luas dua segitiga tersebut sama dengan perbandingan sisi alasnya.



Gambar 2. h adalah garis tinggi ΔABC dan ΔDEF

Dari gambar 2, misalkan sisi alas pada ΔABC adalah $\overline{BC} = a_1$ dan sisi alasnya pada ΔDEF adalah $\overline{EF} = a_2$, sedangkan garis tinggi dari ΔABC dan ΔDEF adalah h , maka perbandingan luasnya adalah $\frac{L_{\Delta ABC}}{L_{\Delta DEF}} = \frac{a_1}{a_2}$

Bukti:

Dari rumus luas segitiga diperoleh $L_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}(a_1 h)$ dan $L_{\Delta DEF} = \frac{1}{2}(a_2 h)$,

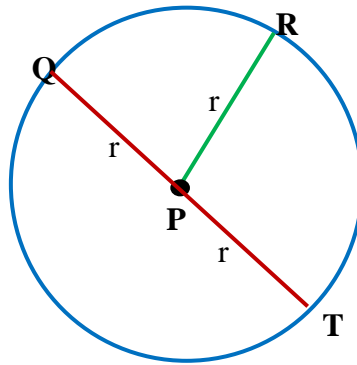
$$\text{Maka } \frac{L_{\Delta ABC}}{L_{\Delta DEF}} = \frac{\frac{1}{2}a_1 h}{\frac{1}{2}a_2 h}$$

$$\text{Sehingga } \frac{L_{\Delta ABC}}{L_{\Delta DEF}} = \frac{a_1}{a_2}$$

Jika sudut-sudut yang berkorespondensi antara dua segitiga kongruen, maka korespondensinya adalah kesebangunan. Merujuk dari teori kesebangunan yang ditulis oleh Moise Down (1963), berikut diberikan kesebangunan sd-sd (sudut-sudut) untuk menunjukkan bukti dari beberapa teori pendukung yang digunakan dalam Teorema *Double Butterfly* pada lingkaran.

Lingkaran adalah himpunan semua titik-titik yang membentuk lengkungan tertutup. Titik-titik pada lengkungan tersebut berjarak sama terhadap suatu titik tertentu, titik tertentu tersebut dinamakan titik pusat lingkaran. Dalam pembahasan artikel ini lingkaran merupakan materi pendukung yang paling utama. Untuk lebih jelasnya mengenai pengertian lingkaran dan beberapa teorema lingkaran, akan dijelaskan pada definisi dan teorema berikut ini.

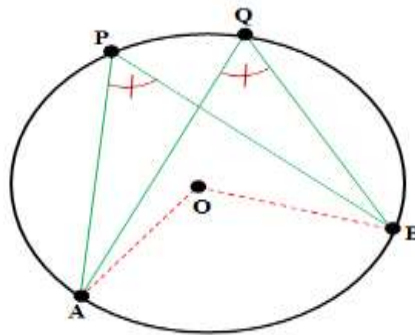
Definisi 2.2.1 Misalkan P adalah sebuah titik dari sebuah bidang yang diberikan dan misalkan r adalah bilangan positif. Lingkaran dengan pusat P dan jari-jari r adalah himpunan semua titik dari bidang tersebut yang mempunyai jarak dari P adalah sama dengan r .



Gambar 4. Lingkaran dengan Pusat P dan B

Pada lingkaran terdapat beberapa teorema yang sering dijumpai dalam geometri, seperti teorema sudut, teorema sudut keliling, dan teorema perpotongan dua tali busur. Berikut diberikan beberapa teorema tersebut.

Teorema 2.2.1 Sudut keliling pada lingkaran yang menghadap busur yang sama mempunyai ukuran sudut yang sama.

Gambar 5. Lingkaran dengan $\angle APB$ dan $\angle AQB$

Dari gambar 5, $\angle APB$ dan $\angle AQB$ adalah sudut keliling yang menghadap busur yang sama yaitu busur \overline{AB} . Dengan menarik garis dari titik A ke O dan garis dari titik B ke O maka terbentuk sebuah sudut yaitu $\angle AOB$, yang merupakan sudut pada lingkaran dan menghadap busur \overline{AB} . Akan dibuktikan $m\angle APB = m\angle AQB$.

Bukti:

Berdasarkan Teorema 2.2.1 diperoleh

$$m\angle AOB = 2m\angle APB \quad \dots(1)$$

$$m\angle AOB = 2m\angle AQB \quad \dots (2)$$

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh

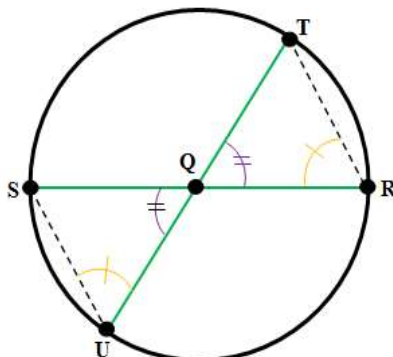
$$2m\angle APB = 2m\angle AQB$$

Sehingga, $m\angle APB = m\angle AQB$

$$\angle APB \cong \angle AQB$$

Pada tali busur lingkaran, jika terdapat dua buah tali busur yang berpotongan di satu titik, maka diperoleh perkalian yang senilai, seperti yang dijelaskan pada Teorema perpotongan dua tali busur berikut ini.

Teorema 2.2.2 Misalkan \overline{RS} dan \overline{TU} adalah tali busur dari suatu lingkaran yang berpotongan di titik Q , maka $\overline{QR} \cdot \overline{QS} = \overline{QU} \cdot \overline{QT}$



Gambar 6. Lingkaran dengan \overline{RS} dan \overline{TU} berpotongan di titik Q

Dari gambar 6. \overline{RS} dan \overline{TU} merupakan dua buah tali busur pada lingkaran yang berpotongan di titik Q . Akan dibuktikan $\overline{QR} \cdot \overline{QS} = \overline{QU} \cdot \overline{QT}$

Bukti:

Karena $\angle SUT$ dan $\angle TRS$ sama-sama menghadap busur ST , maka menurut Teorema 2.2.2 diperoleh

$$\angle QUS \cong \angle QRT \quad (\text{Sd})$$

Dan juga $\angle SQU$ dan $\angle TQR$ adalah sudut yang bertolak belakang, sehingga

$$\angle SQU \cong \angle TQR \quad (\text{Sd})$$

Akibat teorema kesebangunan Sd-Sd diperoleh

$$\Delta SQU \sim \Delta TQR$$

Sehingga terdapat sisi-sisi yang proporsional antara ΔSQU dan ΔTQR , yaitu

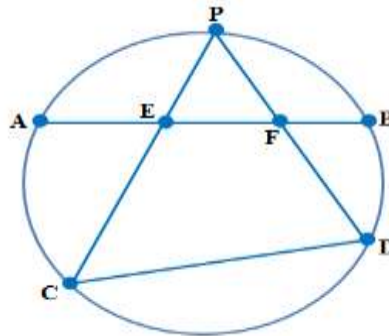
$$\frac{\overline{QS}}{\overline{QT}} = \frac{\overline{QU}}{\overline{QR}}$$

$$\overline{QR} \cdot \overline{QS} = \overline{QU} \cdot \overline{QT}$$

Berikut diberikan definisi lingkaran luar dan teorema mengenai jari-jari lingkaran luar segitiga yang merupakan teori pendukung dalam pembuktian salah satu lema yang memiliki hubungan dengan Teorema *Double Butterfly*.

Lemma Haruki merupakan suatu lema tentang dua buah tali busur pada lingkaran yang tidak berpotongan. Dengan menarik garis dari kedua titik ujung suatu tali busur ke suatu titik pada lingkaran yang berpotongan dengan tali busur ke suatu titik pada lingkaran yang berpotongan dengan tali busur lainnya di dua titik yang berbeda sehingga membentuk segitiga. Seperti yang dijelaskan pada Lemma berikut.

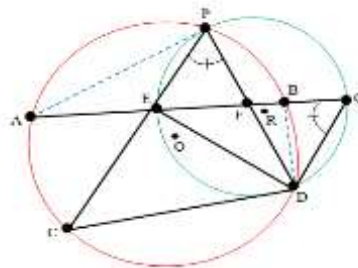
Lemma 3.1.1 (Lemma Haruki) Diberikan dua tali busur \overline{AB} dan \overline{CD} yang tidak berpotongan pada lingkaran, dan P adalah suatu titik pada lingkaran yang ditarik dari titik C dan D sehingga \overline{CP} memotong \overline{AB} di E dan \overline{DP} memotong \overline{AB} di F maka $\frac{\overline{AE} \cdot \overline{BF}}{\overline{EF}}$ adalah konstan. Secara geometri dilukiskan pada gambar berikut.



Gambar 10. Lingkaran dengan perpotongan tali busur \overline{AB} , \overline{PC} dan \overline{PD}

Bukti:

Pembuktian Lema Haruki dimulai dengan menggambar lingkaran luar pada $\triangle PED$ dan titik G adalah perpanjangan garis AB seperti ditunjukkan pada gambar berikut.



Gambar 11. Titik G adalah titik tetap pada garis \overline{AB}

Lingkaran dengan titik pusat R $m\angle EPD = m\angle EGD$ karena sama-sama menghadap busur ED (Sd). Sehingga $m\angle EGD$ konstan untuk setiap posisi P pada lingkaran. G adalah titik tetap pada perpanjangan garis AB dan $m\angle EGD$ konstan untuk setiap posisi P pada lingkaran, maka BG adalah konstan. $m\angle EFP = m\angle GFD$ karena bertolak belakang (Sd). $\triangle EFP \sim \triangle DFG$. (Teorema kesebangunan Sd-Sd)

Berdasarkan teorema 2.2.3 (perpotongan dua tali busur) diperoleh

$$\overline{EF} \cdot \overline{FG} = \overline{PF} \cdot \overline{FD} \tag{2.2.13}$$

Lingkaran dengan titik pusat O

$$m\angle APD = m\angle DBA \text{ karena sama-sama menghadap busur } AD \text{ (Sd)}$$

$$m\angle AFP = m\angle BFD \text{ karena bertolak belakang (Sd)}$$

$$\triangle AFP \sim \triangle BFD \text{ (Teorema kesebangunan Sd-Sd)}$$

Berdasarkan Teorema 2.2.3 (perpotongan dua tali busur) diperoleh

$$\overline{AF} \cdot \overline{FB} = \overline{PF} \cdot \overline{FD} \dots(2.2.14)$$

Substitusikan persamaan (2.2.13) ke persamaan (2.2.14) diperoleh

$$\overline{AF} \cdot \overline{FB} = \overline{EF} \cdot \overline{FG} \quad (2.2.15)$$

Karena $\overline{AF} = \overline{AE} + \overline{EF}$ dan $\overline{FG} = \overline{FB} + \overline{BG}$ maka dari persamaan (2.2.15) dapat dinyatakan

$$(\overline{AE} + \overline{EF}) \cdot \overline{FB} = \overline{EF} (\overline{FB} + \overline{BG})$$

$$\overline{BG} = \frac{\overline{AE} \cdot \overline{BF}}{\overline{EF}}$$

Karena \overline{BG} konstan, sehingga $\frac{\overline{AE} \cdot \overline{BF}}{\overline{EF}}$ konstan.

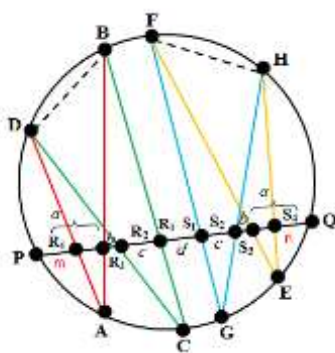
Teorema *Double Butterfly* merupakan pengembangan dari Teorema *Butterfly* pada lingkaran. Teorema *Double Butterfly* pertama kali ditemukan oleh seorang ilmuwan matematika dari London yang bernama Dixon Jones (1976) dan beberapa tahun berikutnya kembali dibahas oleh ilmuwan matematika kebangsaan Amerika yang bernama Larry Hoehn (1990). Pada bab ini dibahas mengenai Teorema *Double Butterfly* dan pembuktiannya dilakukan dengan menggunakan Lema Haruki.

Teorema Double Butterfly dan Pembuktiannya

Teorema *Double Butterfly* merupakan suatu teorema tentang beberapa titik pada sebuah tali busur yang dipotong oleh beberapa tali busur lainnya pada lingkaran sehingga menyerupai dua buah pasang sayap kupu-kupu yang kemudian disebut Teorema *Double Butterfly*.

Teorema 3.3.1(Teorema Double Butterfly) Misalkan \overline{PQ} adalah sebuah tali busur dari sebuah lingkaran, dan misalkan *Butterfly* “R” dan *Butterfly* “S” berada pada lingkaran sehingga sayap-sayapnya memotong PQ di R_4, R_3, R_2, R_1 dan S_1, S_2, S_3, S_4 . Jika $\overline{PR_1} = \overline{QS_1}$, $\overline{PR_2} = \overline{QS_2}$, dan $\overline{PR_3} = \overline{QS_3}$ maka $\overline{PR_4} = \overline{QS_4}$.

Bukti : Pembuktian dengan Lema Haruki



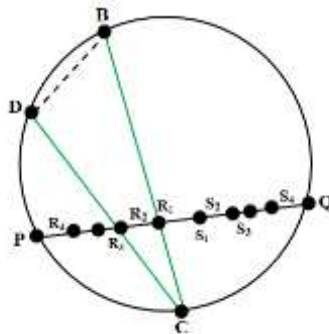
Gambar 12. Lingkaran dengan perpotongan beberapa tali busur

Dari gambar 12. Terdapat empat buah segitiga yaitu ΔBCD dan ΔBAD pada Butterfly “R”, ΔFGH dan ΔFEH pada Butterfly “S”.

Misalkan

$$\overline{PR_3} = \overline{QS_3} = a, \overline{R_3R_2} = \overline{S_3S_2} = b, \overline{R_2R_1} = \overline{S_2S_1} = c, \overline{R_1S_1} = d, a + b + c + d = e, \text{ dan } \overline{PR_4} = m, \overline{QS_4} = n. \quad \dots(1)$$

1. $\triangle BCD$ yang terletak pada Butterfly "R" seperti pada gambar berikut.



Gambar 13. $\triangle BCD$ pada tali busur \overline{PQ}

Berdasarkan Lema (3.1.1) maka berlaku

$$\frac{\overline{PR_2} \cdot \overline{QR_1}}{\overline{R_2R_1}} = \text{konstan}. \quad \dots(2)$$

Karena $\overline{QR_1} = \overline{QS_3} + \overline{S_3S_2} + \overline{S_2S_1} + \overline{S_1R_1}$ dan

$$\overline{PR_2} = \overline{PR_3} + \overline{R_3R_2}$$

Maka dari persamaan (3.3.2) dapat dinyatakan

$$\frac{\overline{PR_2} \cdot \overline{QR_1}}{\overline{R_2R_1}} = \frac{(\overline{PR_3} + \overline{R_3R_2})(\overline{QS_3} + \overline{S_3S_2} + \overline{S_2S_1} + \overline{S_1R_1})}{\overline{R_2R_1}} \quad \dots(3)$$

Karena $\overline{PR_3} = \overline{QS_3} = a, \overline{R_3R_2} = \overline{S_3S_2} = b, \overline{R_2R_1} = \overline{S_2S_1} = c, \overline{R_1S_1} = d$

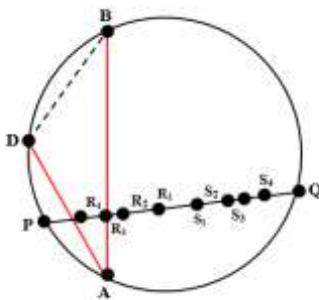
maka dari persamaan (3) diperoleh

$$\frac{\overline{PR_2} \cdot \overline{QR_1}}{\overline{R_2R_1}} = \frac{(a+b)(a+b+c+d)}{c} \quad \dots(4)$$

Dengan $a + b + c + d = e$, sehingga persamaan (4) menjadi

$$\frac{\overline{PR_2} \cdot \overline{QR_1}}{\overline{R_2R_1}} = \frac{(a+b)e}{c} \quad \dots(5)$$

2. $\triangle BAD$ yang terletak pada Butterfly "R" seperti pada gambar berikut.



Gambar 14. $\triangle BAD$ pada tali busur \overline{PQ}

Berdasarkan Lema (3.1.1) maka berlaku.

$$\frac{\overline{PR_4} \cdot \overline{QR_3}}{\overline{R_4R_3}} = \text{konstan.} \quad \dots(5)$$

Karena $\overline{QR_3} = \overline{QS_3} + \overline{S_3S_2} + \overline{S_2S_1} + \overline{S_1R_1} + \overline{R_1R_2} + \overline{R_2R_3}$ dan $\overline{R_4R_3} = \overline{PR_3} - \overline{PR_4}$, maka persamaan (5) dapat dinyatakan

$$\frac{\overline{PR_4} \cdot \overline{QR_3}}{\overline{R_4R_3}} = \frac{\overline{PR_4}(\overline{QS_3} + \overline{S_3S_2} + \overline{S_2S_1} + \overline{S_1R_1} + \overline{R_1R_2} + \overline{R_2R_3})}{\overline{PR_3} - \overline{PR_4}} \dots(6)$$

Karena $\overline{PR_4} = m$, $\overline{PR_3} = \overline{QS_3} = a$, $\overline{S_3S_2} = \overline{R_3R_2} = b$, $\overline{S_2S_1} = \overline{R_2R_1} = c$, $\overline{R_1S_1} = d$, maka dari persamaan (6) diperoleh

$$\frac{\overline{PR_4} \cdot \overline{QR_3}}{\overline{R_4R_3}} = \frac{m(a+b+c+d+c+b)}{a-m} \quad \dots(7)$$

Dengan $a + b + c + d = e$, sehingga persamaan (7) menjadi

$$\frac{\overline{PR_4} \cdot \overline{QR_3}}{\overline{R_4R_3}} = \frac{m(e+b+c)}{a-m} \quad \dots(8)$$

Berdasarkan persamaan (4) dan (8), maka persamaan dapat dinyatakan

$$\frac{(a+b)e}{c} = \frac{m(e+b+c)}{a-m} \quad \dots(9)$$

Dengan cara yang sama, untuk Butterfly "S" diperoleh

$$\frac{\overline{PS_1} \cdot \overline{QS_2}}{\overline{S_1S_2}} = \frac{(a+b)e}{c}$$

$$\frac{\overline{QS_3} \cdot \overline{PS_4}}{\overline{S_3S_4}} = \frac{n(e+b+c)}{a-n} \text{ sehingga}$$

$$\frac{(a+b)e}{c} = \frac{n(e+b+c)}{a-n} \quad \dots(10)$$

Substitusi persamaan (9) ke persamaan (10) diperoleh

$$\frac{m(e+b+c)}{a-m} = \frac{n(e+b+c)}{a-n}$$

$$(a-m)n = (a-n)m$$

$$an = am$$

Karena $\overline{PR_4} = m$, $\overline{QS_4} = n$.

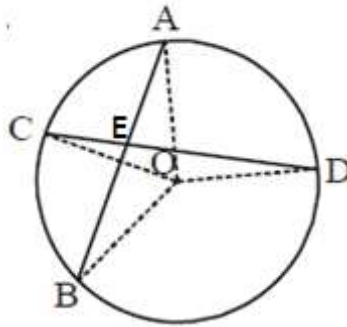
Maka dari persamaan (3.3.11) diperoleh

$$\overline{PR_4} = \overline{QS_4}$$

Dengan begitu terbukti bahwa teorema double butterfly bahwa \overline{PQ} adalah sebuah tali busur dari sebuah lingkaran, dan dimisalkan *Butterfly* "R" dan *Butterfly* "S" berada pada lingkaran sehingga sayap-sayapnya memotong PQ di R_4, R_3, R_2, R_1 dan S_1, S_2, S_3, S_4 . Jika $\overline{PR_1} = \overline{QS_1}$, $\overline{PR_2} = \overline{QS_2}$, dan $\overline{PR_3} = \overline{QS_3}$ maka $\overline{PR_4} = \overline{QS_4}$ adalah "Terbukti".

Contoh Soal

Perhatikan gambar di bawah.



Jika besar $\angle AOC = 65^\circ$ dan $\angle BOD = 140^\circ$, tentukan besar $\angle AEC$ dan besar $\angle BEC$.

Penyelesaian:

$$\angle AEC = \frac{1}{2} \times (\angle AOC + \angle BOD)$$

$$\angle AEC = \frac{1}{2} \times (65^\circ + 140^\circ)$$

$$\angle AEC = \frac{1}{2} \times 205^\circ$$

$$\angle AEC = 102,5^\circ$$

$$\angle BEC + \angle AEC = 180^\circ \text{ (sudut berpelurus)}$$

$$\angle BEC + 102,5^\circ = 180^\circ$$

$$\angle BEC = 180^\circ - 102,5^\circ$$

$$\angle BEC = 77,5^\circ$$

KESIMPULAN

Teorema *Double Butterfly* pada lingkaran merupakan suatu teorema tentang beberapa titik pada tali busur utama yang dipotong oleh beberapa tali busur lainnya yang mengakibatkan perbandingan nilai sisi-sisi pada tali busur utama adalah sama. Pembuktian Teorema *Double Butterfly* dengan Lema Haruki dilakukan dengan menarik garis pada ujung titik sayap kupu-kupu sehingga membentuk dua buah Lema Haruki pada masing-masing *Butterfly* dan memisalkan garis-garis yang terdapat pada tali busur utama yang dipotong oleh beberapa tali busur lainnya.

REFERENSI

Bezverkhayev, Y. 2008. *Haruki's Lemma for Conic*. 5 hal.

Mashadi. Bahan Ajar Geometri. 2012. *Pusat Pengembangan Pendidikan Universitas Riau* : Pekanbaru

Rahmat, Muhammad. *Geometri*. 2001. Universitas Terbuka: Jakarta