Jurnal Pustaka Cendekia Pendidikan
Volume 02, No. 01, Mei - Agustus 2024, pp. 35-45
E-ISSN: 2988-7720
Website: https://pcpendidikan.org/index.php/jpcp

Ruang Topologi

Ilmi Satriani

Program Studi S1 Pendidikan Matematika, Universitas Pahlawan Tuanku Tambusai, Jl. Tuanku Tambusai No. 23
Bangkinang Kota, Kab. Kampar, Provinsi Riau
ilmisatriani12@gmail.com

Abstract

f separation is an axiom used to classify topological spaces based on their open set distribution. The method used in this study is to combine the premises of the axioms of separation in topological spaces so that a theorem connecting the topological spaces can be obtained. In this study, the relationship between the topological spaces is obtained, that is, every T4 space is a T3 space, every T3 space is a T2 space, every T2 space is a T1 space, but the reverse statement does not apply. It is also obtained that each metric space satisfies all the axioms of separation in the spaces T1, T2, T3, and T4. Discussion about the axioms of separation in topological spaces is still open by comparing the axioms of separation of more complex topological spaces such as Tychonoff spaces and Urysohn spaces.
Keywords: Axioms Of Separation, Matrix Space, Topological Space

Abstrak

Pada artikel ini dikaji karakteristik dan hubungan antara aksioma-aksioma separasi dalam ruang-ruang topologi yaitu, ruang T1, ruang T2 (Ruang Hausdorff), ruang T3, ruang T4, dan ruang metrik. Aksioma separasi adalah suatu aksioma yang digunakan untuk mengklasifikasikan ruang-ruang topologi berdasarkan distribusi himpunan terbukanya. Metode yang digunakan dalam kajian ini adalah dengan menggabungkan premis-premis dari aksioma separasi dalam ruang-ruang topologi sehingga dapat diperoleh teorema yang menghubungkan ruang-ruang topologi. Pada kajian ini, diperoleh hubungan antara ruang-ruang topologi tersebut yakni, setiap ruang T4 adalah ruang T3, setiap ruang T3 adalah ruang T2, setiap ruang T2 adalah ruang T1 tetapi tidak berlaku untuk pernyataan sebaliknya. Diperoleh juga bahwa, setiap ruang metrik memenuhi semua aksioma separasi dalam ruang T1, T2, T3, dan T4. Diskusi tentang aksioma separasi dalam ruang topologi masih terbuka dengan membandingkan aksioma separasi dari ruang-ruang topologi yang lebih kompleks seperti, ruang Tychonoff dan ruang Urysohn.
Kata kunci: Aksioma-Aksioma Sparasi, Ruang Matriks, Ruang Topologi

🖂Corresponding author: Ilmi Satriani
Email Address: ilmisatriani12@gmail.com (Jl. Tuanku Tambusai No. 23, Bangkot, Kab. Kampar, Riau)
Received 18 August 2024, Accepted 24 August 2024, Published 30 August 2024

PENDAHULUAN

Kata topologi berasal dari bahasa Yunani yaitu topos yang artinya “tempat” dan logos yang artinya “ilmu” merupakan cabang matematika yang bersangkutan dengan tata ruang. Topologi di suatu himpunan adalah koleksi tidak kosong dari himpunan-himpunan bagian, dimana himpunan bagian kuasanya memenuhi aksioma-aksioma : himpunan tersebut dan himpunan kosong termuat di topologi, gabungan sebarang anggota-anggota keluarga topologi adalah anggota topologi, dan irisan sebanyak hingga anggota-anggota keluarga topologi adalah anggota topologi. Himpunan yang dilengkapi dengan topologi disebut ruang topologis. Semigrup adalah himpunan yang dilengkapi dengan operasi biner yang asosiatif. Semigrup yang diberikan topologi dan memenuhi sifat-sifat tertentu disebut semigrup topologis.

Himpunan terbuka merupakan elemen penting dalam sebuah topologi, karena mereka membentuk dasar yang kuat untuk membangun topologi. Himpunan terbuka ini juga yang akan menjadi persekitaran dari anggota-anggota suatu ruang topologi. Closure dari suatu himpunan bagian dalam ruang topologis terdiri dari semua titik di himpunan bagian tersebut beserta titik limitnya. Suatu titik dikatakan titik closure suatu himpunan jika persekitaran dari titik tersebut memuat semua titik di himpunan itu. Konsep tentang ruang topologi berawal dari pembahasan himpunan terbuka dalam $\Re$ dimana, dibahas mengenai titik dalam batas, dan titik limit.

METODE

Secara umum tulisan ini memuat latar belakang penulisan. Terdapat gambaran umum dari latar belakang tentang permasalahan yang dibahas. Kemudian disajikan teori-teori yang membantu penulisan dalam menyelesaikan masalah yang dipaparkan sebelumnya, sehingga pada pembahasan selanjutnya merupakan pembahasan keseluruhan tulisan ini yang memberikan penjelasan tentang konsep-konsep dasar dan teorema tentang integral dan lingkaran. Semua penulisan sudah didasari pada artikel maupun jurnal yang berkaitan dengan materi penulisan.

HASIL DAN DISKUSI

Pembuktian Ruang topologi

Topologi dari himpunan X adalah koleksi yang berisi himpunan - himpunan bagian dari X yang gabungan dan irisan dari setiap anggotanya termasuk dalam koleksi ini, topologi X juga harus memuat himpunan kosong dan X sendiri.

Diberikan himpunan tak kosong X, suatu koleksi r yang berisikan himpunan- himpunan bagian dari X dikatakan topologi pada r, jika memenuhi sifat-sifat:

X dan himpunan $\emptyset$ termuat di dalam r

$\emptyset, \;\; r$

Gabungan (berhingga ataupun tak hingga) dari himpunan-himpunan di r

termuat di r juga

$Aa \;\; r, \forall a \;\; I \Longrightarrow Aa \;\; r$

$a \;\; I$

I adalah himpunan indeks

Irisan berhingga dari himpunan-himpunan di r berada di r juga.

$A, B \;\; r \Longrightarrow A \cap B \;\; r$

Dan pasangan (X, r) disebut sebagai ruang topologi.

Contoh 1.1. Diberikan $= \{a, b, c, d,$ e, $f\}$ dan

$r1 = \{, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d,$ e, $f\}\}$

Maka $r1$ merupakan topologi di karena memenuhi sifat-sifat (i), (ii), dan (iii) pada Definisi 1.

Contoh 1.2. Diberikan $= \{a, b, c, d,$ e, $f\}$ dan

$r2 = \{, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c,$ e$\}, \{b, c, d\}\}$

Maka $r2$ bukan merupakan topologi di X, karena gabunga

$\{c, d\} \cup \{a, c,$ e$\} = \{a, c, d,$ e$\}$

Tidak termuat di $r2$. Sehingga $r2$ tidak memenuhi sifat (ii) dari Definisi 1.

Contoh 1.3. Diberikan $= \{a, b, c, d,$ e$, f\}$ dan

$r3 = \{, \emptyset, \{a\}, \{f\}, \{a, f\}, \{a, c, f\}, \{b, c, d,$ e$, f\}\}$

Maka $r3$ bukan topologi di X, karena irisan

$\{a, c, f\} \cap \{b, c, d,$ e$, f\} = \{c, f\}$

Tidak termuat di $r3$, sehingga $r3$ tidak memenuhi sifat (iii) dari Definisi 1.

Pada bagian ini akan dibahas mengenai aksioma separasi dalam ruang T_1, ruang T_2 (Ruang Hausdorff), ruang T_3, dan ruang T_4 sehingga, dapat diperoleh teorema yang menghubungkan ruang-ruang topologi tersebut dan ruang metrik. Sebelum itu, akan diberikan definisi yang menghubungkan ruang metrik danruang topologi sebagai berikut:

Misalkan d adalah sebuah metrik pada himpunan tidak kosong X. Suatu topologi r pada yang dihasilkan oleh kelas dari persekitaran dalam disebut topologi metrik atau topologi yang dihasilkan oleh metrik d. Selanjutnya, himpunan dengan topologi r yang dihasilkan oleh metrik d dinamakan, ruang metrik dan dinotasikan oleh $(, d)$.

Dengan demikian, suatu ruang metrik adalah ruang topologi dimana topologinya dihasilkan oleh sebuah metrik. Oleh karena itu, semua konsep yang didefinisikan dalam ruang topologi juga didefinisikan dalam ruang metrik. Akibatnya, dapat dicari hubungan antara ruang metrik dan ruang-ruang topologi lainnya dengan mengambil suatu topologi yang dihasilkan oleh suatu metrik.

Hubungan Aksioma Separasi dalam Ruang T_1 dan T_2

Definisi 7. Aksioma Separasi dalam Ruang T_1

Ruang topologi $(, r)$, disebut ruang $T1$ jika untuk setiap $p, q \in$ dengan $p \neq q$

terdapat $G, H \in r$ sedemikian sehingga $p \in G, p$ ø H dan q ø G, q ø H

Teorema 7.1.

Ruang topologi $(, r)$ merupakan ruang $T1$ jika dan hanya jika untuk setiap $x \in$, singleton $\{\}$ adalah himpunan tertutup.

Bukti.

$(\Rightarrow)$ Diketahui bahwa $(, r)$ merupakan ruang $T1$. Diambil sebarang $p \in$ dan didefinisikan : {p} adalah singleton. Diambil sebarang $q \in \{p\}c \subset$ maka,p ø q sebab $\{p\}c \cap q = \emptyset$ Karena $(, r)$ adalah ruang $T1$ maka terdapat $G, H \in r$ dengan

$p \in H, p$ ø G dan $q \in H, q$ ø G.

Jadi, $\exists H \in r$ dengan sifat $q \in G, q$ ø H dan $q \in H, q$ ø G.

Menurut Definisi 2 tenang titik dalam (interior point) pada himpunan terbuka maka, q titik dalam (interior point) himpunan $\{p\}c$. Karena q diambil sebarang maka $\{p\}c$ himpunan terbuka dan $\{p\}$. Jadi,terbukti bahwa apabila $(, r)$ merupakan rung $T1$ maka setiap singleton dari adalah himpunan terutup.

($\Leftarrow$) Diketahui bahwa setiap singleton dari adalah himpunan tertutup.

Diambil sebarang $p, q \in$ dan $p \neq q$. Dibentuk $\{p\}$ dan {q} singleton akibatnya, $\{p\}$ dan $\{q\}$ terutup.

Selanjutnya didefinisikan : $G = \{p\}c$ dan $H = \{q\}c$ maka, G dan H terbuka.

Jelas bahwa, $p \in H$, p ø G dan $q \in G$, q ø H.

Jadi, $\forall p, q \in$, $\exists G, H \in r \ni p \in H, p$ ø G dan $q \in G, q$ ø. Dari Definisi 7 tentang ruang $T1$ terbukti bahwa $(, r)$ merupakan ruang $T1$

Dari bukti syarat perlu dan syarat cukup maka, Teorema 7.1 terbukti.

Definisi 8. Aksioma Separasi dalam Ruang T_2

Ruang topologi $(, r)$ merupakan ruang $T2$ (Ruang Hausdorff) jika untuk setiap $p, q \in$ dengan $p \neq q$, terdapat $G, H \in r \ni p \in G, q \in H$ dan $G \cap H = \emptyset$.

Teorema 8.1

Setiap ruang T_2 (Ruang Hausdorff) merupakan ruang T_1.

Bukti.

Misalkan $(, r)$ adalah ruang topologi dan diketahui bahwa $(, r)$ adalah ruang $T2$. Ambil sebarang p, q $\in$ dengan $p \neq q$. Karena $(, r)$ adalah ruang $T2$ maka, $\exists$ $G, H \in r \ni p \in G$ dan $q \in H$, $\langle$ $\cap H = \emptyset$. Karena $p \in G, q \in H$ dan $G \cap H = \emptyset$ maka, p ø H, q ø G.

Jadi, $\exists G, H \in r \ni p \in G, p$ ø H dan $q \in H, q$ ø G sehingga menurut Definisi 7 terbukti bahwa $(, r)$ adalah ruang $T1$.

Akibat 8.1

Tidak semua ruang T_1 adalah ruang T_2 (Ruang Hausdorff).

Bukti.

Andaikan pernyataan salah maka setiap ruang $T1$ adalah ruang $T2$. Ambil sebarang $p, q \in$ dengan $p \neq$ q maka, $\exists G, H \in r \ni p \in G, q \in H$ dan $G \cap H =$
$\emptyset$. Karena, $G, H \in r$ maka, G dan H adalah himpunan terbuka tidak berhingga sebab G^c dan H^c adalah himpunan tertutup dan berhingga . Karena, $G \cap H = \emptyset$ maka $G \cap H \neq \emptyset$ dan $G \subset H^c$. Pernyataan G $\subset H^c$ tidak mungkin terjadi sebab,G tidak berhingga dan H^c berhingga. Jadi, pengandaian salah dan pernyataan benar yakni, tidak semua ruang T_1 adalah ruang T_2.

Hubungan Aksioma Separasi dalam Ruang T_2 dan T_3

Definisi 9. Aksioma Separasi dalam Ruang Regular

Ruang topologi $(, r)$ adalah ruang regular jika untuk setiap himpunan tertutup
$F \subset$ dan $p \in$, p ø F maka terdapat $G, H \in r$, $G \cap H = \emptyset \ni F \subset G$ dan $p \in H$.

Definisi 10. Aksioma Separasi dalam Ruang T3

Ruang topologi $(, r)$ merupakan ruang $T3$ apabila $(, r)$ adalah ruang regular dan memenuhi aksioma separasi dalam ruang T_1. Selanjutnya, ruang T_3 disebut juga sebagai ruang regular T_1.

Teorema 10.1

Setiap ruang T3 adalah ruang T2.

Bukti.

Diketahui $(, r)$ adalah ruang $T3$. Diambil sebarang $p, q \in , p \neq q$. Dibentuk singleton $\{p\}$ sedemikian hingga $\{p\}$ tertutup. Jelas bahwa, q ø $\{p\}$ sebab, $p \neq q$. Karena $(, r)$ adalah ruang $T1$ maka, $(, r)$ adalah ruang reguler sehingga,

$\exists G, H \in r, G \cap H = \emptyset \ni \{p\} \subset G$ dan $q \in H$. Jelas bahw, $p \in G$ sebab, $\{p\} \subset G$ dan $p \in \{p\}$.

Jadi $\exists G, H \in r \ni p \in G, q \in H$ dan $G \cap H = \emptyset$. sehingga menurut Definisi 8 tentang ruang $T2$, terbukti bahwa $(, r)$ merupakan ruang $T2$.

Sifat 10.1

Tidak semua ruang regular merupakan ruang T_1.

Bukti.

Akan ditunjukkan bahwa pernyataan benar dengan menggunakan sebuah contoh penyangkal berikut.

Pandang suatu ruang topologi $(, r)$ dimana $= \{□, b, c, \}$ dan $r =$ $\{\emptyset, , \{a\}, \{b, c\}\}$ adalah suatu topologi pada X. Akan ditunjukkan bahwa $(, r)$ adalah ruang regular.

Karena $r = \{\emptyset, , \{a\}, \{b, c\}\}$ maka, himpunan-himpunan tertutup pada adalah,

sebab, $c = \emptyset \in r$ terbuka

$\emptyset$ sebab, $\emptyset = \in r$ terbuka

$\{a\}$ sebab, $\{a\}c = \{b, c\} \in r$ terbuka

$\{b, c\}$ sebab, $\{b, c\}c = \{a\} \in r$ terbuka

Dimana, himpunan-himpunan bagian tertutup dari dan memenuhi aksioma separasi dalam ruang regular yakni,

Untuk $\emptyset \subset$ berlaku,

$a \in , a$ ø $\emptyset$ maka $\exists G = \{a\}, H = \{b, c\} \in r, G \cap H = \emptyset \ni \emptyset \subset H$ dan

$a \in G.b \in , b$ ø $\emptyset$ maka $\exists G = \{a\}, H = \{b, c\} \in r, G \cap H = \emptyset \ni \emptyset \subset G$

dan $b \in H, c \in , c$ ø $\emptyset$ maka $\exists G = \{a\}, H = \{b, c\} \in r, G \cap H = \emptyset \ni \emptyset \subset$

G dan $c \in H$

Untuk $\{b, c\} \subset$ berlaku

$b \in ,$ ø $\{a\}$ maka $\exists G = \{a\}, H = \{b, c\} \in r, G \cap H = \emptyset \ni \{a\} \subset$ dan $b \in$ c ∈ X, c ø {a} maka ∃G = {a}, H = {b, c} ∈ τ, G ∩ H = ∅ ∋ {a} ⊂dan c ∈ H Jadi, $\{b, c\} \subset$ memenuhi aksioma separasi dalam ruang reguler.

Untuk $\{b, c\} \subset$ berlaku

a ∈ X, a ø {b, c} maka ∃G = {a}, H = {b, c} ∈ τ, G ∩ H = ∅ ∋ ∅ ⊂ Hdan

$c \in G$

Jadi, $\{b, c\} \subset$ memenuhi aksioma separasi dalam ruang regular. Dari (i), (ii) dan (iii) terbukti bahwa (, r) adalah ruang regular. Akan tetapi,(, r) bukan merupakan ruang $T1$ sebab, terdapat sebuah singleton $\{b\}$ yang tidak tertutup. Terbukti bahwa tidak semua ruang regular merupakan ruang $T1$.

Akibat 10.1. Syarat Cukup Suatu Ruang Regular Merupakan Ruang T1

Jika suatu ruang regular(, r) dengan r adalah suatu topologi diskrit maka (, r) merupakan ruang $T1$.

Bukti.

Diketahui (, r)adalah suatu regular dengan r adalah suatu topologi diskrit yakni,

r = 2x , $\forall x \in$. Ambil sebarang $p, q \in$, $p =\neq q$ dan bentuk singleton,

$\{p\}, \{q\} \subset$. Jelas bahwa, $\{p\}$ dan $\{q\}$ adalah himpunan tertutup sebab,

$\{p\}c$, $\{q\}c \in r$ = 2x. Dipilih, $F = \{p\} \subset$ dan $q \in$, q ø $F\{p\}$. $p \neq q$. Karena, (, r) adalah ruang reguler maka, $\exists G, H \in r$ sebab, $p \neq q$. Karena, $q \in H$ reguler maka, $\exists G, H \in r$, $G \cap H = \emptyset \ni F = \{p\} \subset G$ dan $q \in H$. Jelas bahwa, $p \in G$

sebab, $p \in \{p\}$ dan $\{p\} \in G$ tatapi, p ø H sebab, $G \cap H = \emptyset$. Berlaku juga

$q \exists H$, q ø G sebab, $G \cap H = \emptyset$.

Jadi $\exists G, H \in r \ni p \in G \backslash H$ dan $q \in H$ sehingga menurut Definisi 7 tentang ruang $T1$ terbukti bahwa ruang reguler (, r) juga merupkan ruang $T1$.

Hubungan Aksioma Separasi dalam Ruang T3 dan T4

Definisi 11. Aksioma Separasi dalam Ruang Normal

Ruang topologi (, r) adalah ruang normal jika untuk setiap $F1$ dan $F2$ masing- masing adalah himpunan bagian tertutup dari yang saling lepas maka, $\exists G, H \in$

r, $G \cap H = \emptyset \ni F_1 \subset G$ dan $F_2 \subset H$.

Definisi 12. Aksioma Separasi dalam Ruang T4

Ruang topologi (, r) adalah ruang $T4$ apabila, (, r) merupakan ruang normal dan memenuhi aksioma separasi dalam ruang T_1. Selanjutnya, ruang T_4 dikenal juga sebagai ruang normal T_1.

Teorema 12.1.

Setiap ruang T4 adalah ruang T3.

Bukti.

Diketahui bahwa (, r) adalah ruang $T4$. Diambil sebarang $F \subset$ merupakan himpunan bagian tertutup dan ($p \in$, p ø F). Karena (, r) adalah ruang $T4$ maka, (, r) merupakan ruang $T1$. Dibentuk singleton $\{p\}$ himpunan tertutup. Jelas bahwa, $F \subset \{p\} = \emptyset$ sebab, p ø F. Selanjutnya, karena (, r) adalah ruang

$T4$ maka, (, r) adalah ruang normal sehingga, $\exists G, H \in r$, $G \cap H = \emptyset \ni F \subset G$

dan $\{p\} \subset H$, karena, $p \in \{p\}$ dan $\{p\} \subset H$ dan $p \in H$. jadi $\exists G, H \in r$, $G \cap H =$

$\emptyset \ni F \subset G$ dan $p \in H$ sehingga, menurut Definisi 9 (, r) adalah ruang reguler, karena, (, r) adalah ruang dan ruang T1 maka, berdasarkan Definisi 10 terbukti bahwa (, r) adalah ruang T3.

Sifat 12.1

Tidak semua ruang normal adalah ruang T_1.

Bukti.

Akan dibuktikan sifat tersebut dengan menggunakan sebuah contoh penyangkal berikut.

Misalkan = $\{a, b, x\}$ dan r = $\{\emptyset$, , $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, b\}\}$ adalah topologi pada . Akan ditunjukkan bahwa (, r) merupakan ruang normal. Karena

r = $\{\emptyset$, , $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, b\}\}$ maka, himpunan-himpunan tertutup dari adalah:

$\emptyset$ sebab, $\emptyset$ = $\in r$ himpunan terbuka.

sebab, = $\emptyset \in r$ himpunan terbuka.

$\{b, c\}$ sebab, $\{b, c\}c$ = $\{a\} \in r$ himpunan terbuka

$\{a, c\}$ sebab, $\{a, c\}c$ = $\{b\} \in r$ himpunan terbuka

$\{c\}$ sebab, $\{c\}c$ = $\{a, b\} \in r$ himpunan terbuka

Dari himpunan-himpunan tertutup di atas, dapat dilihat bahwa himpunan- himpunan tertutup yang saling lepas yaitu, F1 = $\emptyset$ dan F2 = atau $\{b, c\}$ atau

$\{a, c\}$ atau $\{c\} \ni \exists G = \emptyset, H =$ $\in r$ dimana, $G \cap H = \emptyset$ dan berlaku F1 = $\emptyset \subset G$

dan F2 $\subset H$, jadi, terbukti bahwa (, r) di atas merupakan ruang normal, akan tetapi, (, r) di atas bukan merupakan ruang T1 sebab, terdapat sebuah singleton

$\{a\} \subset$ yang tidak tertutup. Terbukti bahwa tidak semua ruang normal adalah ruang T1.

Akibat 12.1 Syarat Cukup Suatu Ruang Normal Merupakan Ruang T_1

Jika (X, r) merupakan suatu ruang normal dengan r adalah suatu topologi diskrit maka, (X, r) marupakan Ruang T_1

Bukti.

Diketahui (X, r) adalah suatu ruang normal dengan r adalah suatu topologi diskrit yakni, r = 2x , $\forall x$ $\in$. Diambil sebarang $p, q \in$ dengan $p \neq q$. Dibentuk $ngleton$ $F_1 = \{p\}$, $F_2 = \{q\} \subset$.

Jelas bahwa, $F_1 = \{p\}$ dan $F_2 = \{q\}$ himpunan tertutup sebab, $\{p\}^c$, $\{q\}^c \in \tau$ = 2^x dengan $F_1 \cap F_2 = \{p\} \cap \{q\} = \emptyset$. Karena (X, r) adalah ruang normal maka,

$\exists G, H \in r$ $G \cap H = \emptyset \ni F_1 = \{p\} \subset G$ dan $F_2 = \{q\} \subset H$.

Jelas bahwa, $p \in G$ sebab $p \in \{p\} = F_1$ dan $F_1 = \{p\} \subset G$ tetapi $p \neq H$ sebab, $G \cap H = \emptyset$. Berlaku juga, $q \in G$ sebab $q \in \{q\} = F_2$ dan $F_2 = \{q\} \subset G$ tetapi $q \neq H$ sebab, $G \cap H = \emptyset$. Jadi $\exists G, H \in r \ni p \in G/H$ dan $q \in G/H$. Sehingga, menurut Definisi 7 tentang T_1 terbukti bahwa, ruang normal (X, r) merupakan ruang T_1.

Hasil Utama: Teorema Fundamental Separasi Dalam Ruang Topologi

Pada bagian ini, akan diberikan kumpulan teorema yang menghubungkan ruang metrik dengan ruang-ruang topologi yang dinamakan ruang fundamental separasidalam ruang topologi

Teorema 2.4.1

Setip ruang metrik merupakan ruang T_1.

Bukti.

Didefinisikan $(, d)$ adalah ruang metrik. Diambil sebarang $p, q \in$ dengan $p \neq q$. Karena $(, d)$ adalah ruang metrik maka, $d(p, q) > 0$. Selanjutnya,dibentuk persekitaran N (p) dan N (q) dengan $r = \frac{1}{2}$ $d(p, q)$.

r r

Akibatnya, diperoleh $N_r (p) \cap N_r (q) = \emptyset$. Menurut Teorema 2.1.3 $N_r (p)$ dan $N_r (q)$ adalah himpunan terbuka. Akibatnya, $N_r (p) \cap N_r (q) \in r$. Jelas bahwa, $p \in N_r(p), p$ ø $N_r(q)$ dan $q \in N_r (q), q$ ø $N_r(p)$ sebab $N_r(p) \cap N_r(q) = \emptyset$.

Jadi, $\exists N_r (p), N_r (q) \in r \ni p \in N_r (p), p$ ø $N_r (q)$ dan $q \in N_r (q), q$ ø $N_r (p)$. Sehingga, terbukti bahwa$(, d)$ adalah topologi ruang T1.

Teorema 2.4.2

Setiap ruang metrik merupakan ruang T_2 $(Ruang\ Hausdorff)$.

Bukti.

Didefinisiskan $(, d)$ adalah ruang matrik. Selanjutnya, diambil sebarang $p, q \in$ dengan $p \neq q$. Karena $(, d)$ adalah ruang metrik maka $d(p, q) > 0$. Dibentukpersekitaran N (p) dan N (q) dengan, $r = \frac{1}{2}$ $d(p, q)$. Akibatnya, diperoleh

r r

$N_r (p) \cap N_r (q) = \emptyset$. Dari Teorema 2.1.3, $N_r (p)$ dan $N_r (q)$ adalah himpunanterbuka. Akbatnya, $N_r (p) \cap N_r(q) \in r$. Selanjutnya, diperoleh, $p \in N_r(p), p$ ø $N_r(q)$ sebab $N_r (p) \cap N_r (q) = \emptyset$. Jadi, $\exists N_r(p)$, $N_r(q) \in r \ni p \in N_r(p), q \in N_r(q)$ dan Nr $(p) \cap Nr$ $(q) = \emptyset$. Sehingga, terbukti bahwa $(, d)$ merupakan ruang T2.

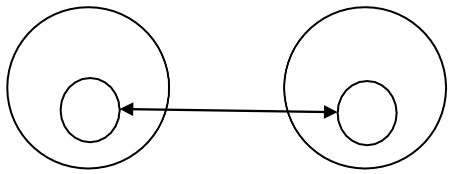
Teorema 2.4.3

Setiap ruang metrik merupakan ruang T_3.

Bukti.

Misalkan r adalah suatu topologi pada X oleh metriks atau jarak d. ambil sebarang himpunan tertutup $F \subset$ dan $p \in$, p ø F. sehingga, $\exists r > 0, \forall x \in F$ berlaku $d(x, p) > r > 0$. Dibentuk : $G = \cup xf\ Nr/\ (x)$ dan $H = Nr$ (p) dimana, menurut Teorema 2.1.3, G dan H adalah himpunan terbuka. Sehingga, $G, H \in r$ dan $G \cap H = \emptyset$.

G H



Gambar 1. Abstraksi pembentuk G dan H

Jika $\exists G, H \in r$, $G \cap H = \emptyset \ni\ni F \subset G$ dan $p \in H$. Menurut definisi ruang regular, dapat disimpulkan bahwa (, d) merupakan ruang regular. Berdasarkan Teorema , telah ditunjukkan bahwa (, d) merupakan ruang T1. Karena, (, d) memenuhi aksioma separasi dalam ruang regular dan ruang T1 maka menurut definisi ruang T3 terbukti bahwa (, d) merupakan ruang T3.

Teorema 2.4.4

Setiap ruang metrik merupakan ruang T_4.

Bukti

Misalkan r adalah topologi pada oleh metrik atau jarak d. Diambil sembarang himpunan-himpunan bagian tertutup $F1$, $F2 \subset$ dengan $F1 \cap F2 = \emptyset$. Sehingga,

$\exists r > 0, \forall x \in F_1, y \in F_2$ dengan, $d(x, y) > r > 0$.

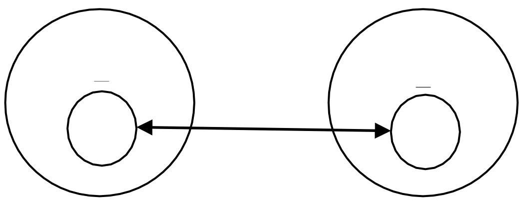
Dibentuk : G = $\cup_{x\ \ F1}\ Nr/_4\ (x)$

dah H= $\cup_{y\ \ F2}\ Nr/_4\ (y)$

dimana, Teorema 3.1

diperoleh, G dan H himpunan terbuka. Sehingga, $G, H \in r$ dan $G \cap H = \emptyset$

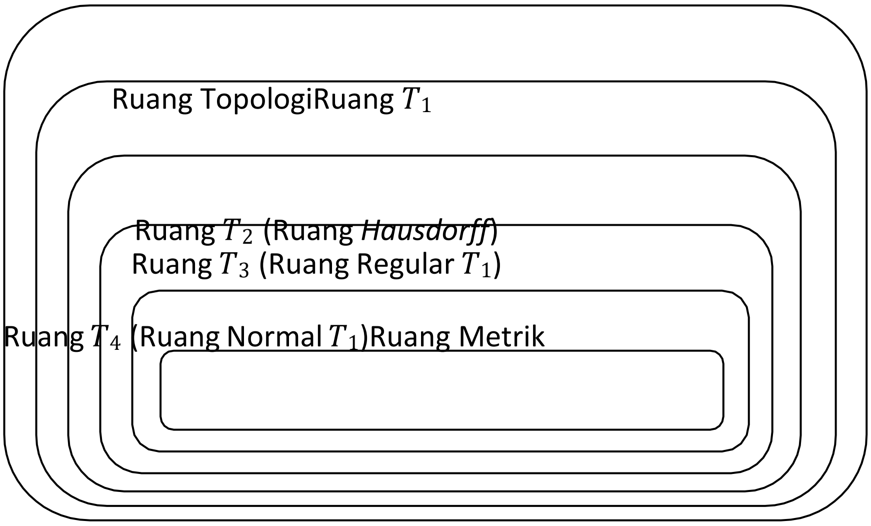
G H



Gambar 2. Abstraksi pembentuk G dan H

Jadi $\exists G$, $H \in r$, $G \cap H = \emptyset \ni F_1 \subset G$ dam $F_2 \subset H$. Menurut definisi ruang normal, dapat disimpulkan bahwa (, r) adalah ruang normal. Selanjutnya, berdasarkan teorema 2.4.1, telah ditunjukkan bahwa (, d) memenuhi aksioma separasi dalam ruang normal dan ruang $T1$ maka terbukti bahwa (, d) merupakan ruang $T4$.

Dari Torema 2.4.1, Teorema 2.4.2, Teorema 2.4.3, dan Torema 2.4.4 dapat dikatakan bahwa suatu ruang metrik memenuhi semua aksioma separasi dalam ruang-ruang topologi yakni, ruang T_1, ruang T_2, ruang T_3, dan ruang T_4. Sehingga ruang metrik termuat dalam setiap ruang-ruang topologi tersebut sebagaimana ditunjukkan oleh gambar berikut yang menunjukkan hubungan antara ruang-ruangtopologi dan ruang metrik.



Gambar 3. Pengelompokan ruang-ruang topologi

Dari Gambar 3 terlihat bahwa ruang metrik memiliki lingkup tersempit sebab, termuat di semua ruang-ruang topologi sedangkan, ruang topologi memiliki lingkup terluas sebab, memuat ruang-ruang topologi lain dari ruang metrik.

KESIMPULAN

Dari hasil kajian ini diperoleh bahwa dengan menggabungkan premis dari aksioma-aksioma separasi dalam masing-masing ruang topologi tersebut, diperoleh beberapa sifat sebagai berikut. Setiap ruang T_2 (Ruang *Hausdorff*) merupakan ruang T_1. Selanjutnya, setiap ruang T_3 (Ruang Regular T_1) merupakan ruang T_2 (Ruang *Hausdorff*) dan setiap ruang T_4 (Ruang Normal T_1) merupakan ruang T_3 (Ruang Regular T_1) serta, setiap ruang metrik merupakan ruang-ruang topologi tersebut. Akan tetapi, sifat-sifat hubungan antara ruang-ruang topologi tersebut tidak berlaku untuk kebalikannya.

Dari hasil kajian ini, diperoleh juga suatu teorema fundamental separasi ruang topologi yang merupakan gabungan dari beberapa teorema yang menyimpulkan bahwa ruang metrik memenuhi semua aksioma separasi dalam ruang-ruang topologi yakni, ruang T_1, ruang T_2 (Ruang *Hausdorff*), ruang T_3 , danruang T_4.

Artikel ini masih belum sempurna dalam penulisan, sehingga diharapkan jika ada saran atau kritik dapat digunakan untuk penulisan berikutnya.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada seluruh pihak yan telah terlibat dalam penulisan artikel ini.

REFERENSI

Los, U. M. D. E. C. D. E. (n.d.). ruang topologi. 1–3.

Pengampu, D., Satriawan, R., & Pd, M. (n.d.). Ruang Topologi.

Sarjana, G., Diajukan, S.-1, Dewi, O., 05610002, F., Sains, F., Teknologi, D., Sunan, U., & Yokyakarta, K. (2010). Ekuivalensi Topologi Pada Ruang Topologi Skripsi Diajukan kepada Program Studi Matematika UIN Sunan Kalijaga Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat Guna Memperoleh.

Albert Ch. Soewongsono, Ariyanto dan Jafaruddin. (2015). Teorema Berbasis Aksioma Separasi dalam Ruang Topologi. Jurnal Matematika Integratif., Volume 11, Nomor 2, hal. 85-96.

Julaeha, Siti. (2015). Pengantar Topologi. Bandung: Matematika Sains 2012 UIN SGD.