Jurnal Pustaka Cendekia Pendidikan
Volume 02, No. 02, September-Desember 2024, pp. 88-94
E-ISSN: 2988-7720
Website: https://pcpendidikan.org/index.php/jpcp

Derivatif Fungsi Hiperbolik

Nadia Nur Fadilla

Program Studi Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Pahlawan Tuanku Tambusai, Jl. Tuanku Tambusai No.23, Bangkinang, Kec. Bangkinang, Kabupaten Kampar, Riau
nadianadia258023@gmail.com

Abstract

Functions are defined as rules that relate each domain element to exactly one member of the codomain. The hyperbolic function is a combination of exponential functions that have inverses and derivatives and anti-derivatives of hyperbolic functions and their inverses (Faisal et al., 2012). The main hyperbolic functions are sinh x, cosh x, sech x, and csch x. The derivative of the hyperbolic function is calculated using the derivative of the exponential function formula and the identity formula of other hyperbolic functions. The derivative is a measure of how a function changes as its value changes or how one quantity changes when another quantity changes. Derivatives (derivatives) are the result of the process of differentiation or differentiation of a function. So, derivatives are closely related to differentials (Asyhar, 2018).
Keywords: Derivative, Hyperbolic Function, Hyperbolic Function Derivatives

Abstrak

Fungsi didefinisikan sebagai aturan yang menghubungkan setiap elemen domain dengan tepat satu anggota pada kodomain. Fungsi hiperbolik adalah salah satu hasil kombinasi dari fungsi eksponen yang memiliki invers serta turunan dan anti turunan fungsi hiperbolik dan inversnya (Faisal et al., 2012). Fungsi hiperbolik utama yaitu sinh x, cosh x, sech x, dan csch x. Turunan fungsi hiperbolik dihitung menggunakan turunan rumus fungsi eksponensial dan rumus identitas fungsi hiperbolik lainnya. Turunan merupakan suatu pengukuran terhadap bagaimana fungsi berubah seiring perubahan nilai atau bagaimana suatu besaran berubah akibat perubahan besaran lainnya. Turunan (derivatif) merupakan hasil dari proses pendiferensialan atau diferensiasi dari suatu fungsi. Jadi, turunan erat sekali hubungannya dengan diferensial (Asyhar, 2018).
Kata Kunci: Turunan, Fungsi Hiperbolik, Derivatif Fungsi Hiperbolik

✉ Corresponding author: Nadia Nur Fadilla
Email Address: nadianadia258023@gmail.com (Jl. Tuanku Tambusai No.23, Bangkinang, Kab.Kampar, Riau)
Received 19 October 2024, Accepted 25 October 2024, Published 31 October 2024

PENDAHULUAN

Fungsi didefinisikan sebagai aturan yang menghubungkan setiap elemen domain dengan tepat satu anggota pada kodomain. Fungsi hiperbolik adalah salah satu hasil kombinasi dari fungsi- fungsi eksponen yang memiliki invers serta turunan dan anti turunan fungsi hiperbolik dan inversnya.(Faisal et al., 2012).

Turunan adalah cabang ilmu matematika yang digunakan untuk menyatakan hubungan kompleks antara satu variabel tak bebas dengan satu atau beberapa variabel bebas lainnya.Turunan juga merupakan suatu pengukuran terhadap bagaimana fungsi berubah seiring perubahan nilai atau bagaimana suatu besaran berubah akibat perubahan besaran lainnya. Turunan (derivatif) merupakan hasil dari proses pendiferensialan atau diferensiasi dari suatu fungsi. Jadi, turunan erat sekali hubungannya dengan diferensial (Asyhar, 2018).

Turunan fungsi $f\ (x)$dinotasikan dengan $f'(x)$ yang nilainya pada sebarang x adalah $f'(x)$= $\lim_{h\to 0} \frac{f\ (x+h)-f\ (x)}{h}$ dengan syarat nilai limit dari $f\ (x)$ada. Turunan didefinisikan sebagai limit dari perubahan rata-rata dari nilai fungsi terhadap variable x. Jika ingin menentukan turunan dari suatu fungsi, maka perlu melakukan pendiferensialan fungsi tersebut. Dan hasil yang diperoleh dari proses pendiferensilan disebut turunan (derivatif). Diferensial membahas tentang tingkat perubahan suatu fungsi sehubungan dengan perubahan kecil dalam variabel bebas fungsi yang bersangkutan (Aqilah et al., 2021).

METODE

Secara umum tulisan ini memuat latar belakang penulisan. Terdapat gambaran umum dari latar belakang tentang permasalahan yang dibahas. Kemudian disajikan teori-teori yang membantu penulisan dalam menyelesaikan masalah yang dipaparkan sebelumnya, sehingga pada pembahasan selanjutnya merupakan pembahasan keseluruhan tulisan ini yang memberikan penjelasan tentang cara menjabarkan Derivatif fungsi hiperbolik.

HASIL DAN DISKUSI

Turunan

Definisi 3.1

Turunan sebuah fungsi f adalah fungsi lain f' yang memiliki nilai pada sebuah bilangan $x$didefinisikan sebagai $f'(x)$ = $\lim_{h\to 0} \frac{f\ (x+h)-f\ (x)}{h}$(Saripudin, n.d.). Jika limit itu ada, dikatakan bahwa fungsi tersebut terdiferensialkan pada x. Pencarian turunan disebut pendiferensialan. Syarat dari turunan fungsi f(x) adalah f(x) memiliki nilai limit (bukan ∞ atau $-\infty$).

Teorema 3.1

Jika f(x) = x maka f'(x) = 1

Bukti:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x}+h-\cancel{x}}{h}$ (karena f(x) = x, maka f(x+h) = x+h)

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 1$$

$$= 1$$

Maka terbukti jika f(x) = x maka f'(x) = 1

Contoh

1. Carilah turunan dari $f(x)$ = 2x + 5

Penyelesaian

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f\ (x+h) - f\ (x)}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{[\ 2(\ x+h) + 5] - \ [2x + 5x]}{h}$

$= \ \lim_{h \to 0} \frac{2\text{h}}{\text{h}}$

$= 2$

Jadi, turunan dari $f(x)$ = 2x + 5 adalah $f'(x) = 2$

2. Carilah turunan dari $f(x)$ = x^2

Penyelesaian

$f'(x) \ = \lim_{h \to 0} \frac{f\ (x+h) - f\ (x)}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{(\ x+h)^2 - \ x^2}{h}$

= $\lim_{h \to 0} \frac{(x^2 + 2\ xh + h)^2 - x^2}{h}$

= $\lim_{h \to 0} (\ 2x + h\ )$

= 2x

Jadi, turunan dari $f(x)$ = x^2 adalah $f'(x) = 2x$

Fungsi Hiperbolik

Definisi 3.2

Dalam matematika kombinasi-kombinasi dari fungsi eksponen e^xdan e^{-x}diberi nama khusus suatu fungsi yang memuat kombinasi dari kedua fungsi yakni fungsi hiperbolik. Untuk itu dibangun fungsi p dan q sebagai berikut. P : R→$R^+, p\ (x) = \frac{e^x}{2}$ dan q: R→R^+, $q\ (x) = \ \frac{e^{-x}}{2}$

Teorema 3.2

$f\ (x) = \ \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ dan $g\ (x) = \ \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ maka $f\ (0) = 1$ dan $g\ (0) = 0$

Bukti

$f\ (x) = \ \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ maka $f\ (0) = \ \frac{e^0 + e^0}{2} = \frac{1+1}{2} = \frac{2}{2} = 1$ dan $g\ (x) = \ \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ maka $g\ (0) = \ \frac{e^0 - e^0}{2} = \frac{1-1}{2} = \ \frac{0}{2} = 0$

maka terbukti $f\ (0) = 1$ dan $g\ (0) = 0$

Contoh

1. Diketahui $f\ (x) = \ \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ maka tentukanlah $f^2(0)$

Pembahasan:

$f^2(x) = (\frac{e^x + \ e^{-x}}{2})^2$

$= \frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{2^2}$

$$= \frac{e^{2x} + 2e^{x}e^{-x} + e^{-2x}}{4}$$

$$f^2(0) = \frac{e^{2.0} + 2e^{0}e^{-0} + e^{-2.0}}{4}$$

$$= \frac{e^{0} + 2e^{0}e^{0} + e^{0}}{4}$$

$$= \frac{1 + 2.1.1 + 1}{4}$$

$$= \frac{4}{4}$$

$$= 1$$

Turunan Fungsi Hiperbolik

Sifat 3.1

1. Dipunyai $f\,:R \to R$, fungsi sinus hiperbolik didefinisikan sebagai sinh $x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$
2. Dipunyai $f\,:R \to (1, \infty)$, fungsi cosinus hiperbolik didefinisikan sebagai cosh $x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$
3. Dipunyai $f\,:R \to (-1,1)$, fungsi tangen hiperbolik didefinisikan sebagai tanh $x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$
4. Dipunyai $f\,:R \to (-\infty,-1) \cup (1, \infty)$, fungsi cotangen hiperbolik didefinisikan sebagai coth $x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}}$
5. Dipunyai $f\,:R \to (0,1)$, fungsi secan hiperbolik didefinisikan sebagai Sech Sech $x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^{x} + e^{-x}}$

Teorema 3.3

$a.\ \frac{d\,(\sinh\ x)}{dx} = \cosh x$

$b.\ \frac{d\,(\cosh\ x)}{dx} = \sinh x$

$c.\ \frac{d\,(\tanh\ x)}{dx} = sech^2 x$

$d.\ \frac{d\,(\coth\ x)}{dx} = -csh^2 x$

$e.\ \frac{d\,(\mathrm{sech}\ x)}{dx} = -tanhx.\,\mathrm{sech}\,x$

Bukti

$a.\ \frac{d\,(\sinh\ x)}{dx} = \cosh x$

$\frac{d}{dx}\sinh x = \frac{d}{dx}\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$(berdasarkan sifat 3.1 (1) $\sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$)

$= \frac{1}{2}\frac{d\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)}{dx}$(aturan diferensial $\frac{d}{dx}(a.f) = a.\frac{d}{dx}(f)$)

$= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

$= \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

= cosh x(berdasarkan sifat 3.1(2) cosh x $= \frac{e^x+e^{-x}}{2}$)

b. $\frac{d\,(\cosh\, x)}{dx} = \sinh x$

$\frac{d}{dx}\cosh x = \frac{d}{dx}\frac{e^x+e^{-x}}{2}$(berdasarkansifat 3.1 (2) $\cosh x = \frac{e^x+ e^{-x}}{2}$)

= $\frac{1}{2}\frac{d\,(e^x+ e^{-x})}{dx}$(aturan diferensial $\frac{d}{dx}(a.f) = a.\frac{d}{dx}(f)$)

= $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

$= \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

= Sinh x(sifat 3.1(1) sinh x=$\frac{e^x - e^{-x}}{2}$)

c. $\frac{d\,(\tanh\, x)}{dx} = sech^2 x$

$\frac{d\,(\tanh\, x)}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ (berdasarkan sifat 3.1 (3) $\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$)

=$\frac{e^x+e^{-x}.\frac{d}{dx}(e^x - e^{-x}) - e^x - e^{-x}.\frac{d}{dx}(e^x+e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2}$ (berdasarkan aturan diferensiasi $\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right)\frac{\frac{d}{dx}(f)x\,g - fx\frac{d}{dx}(g)}{g^2}$)

= $\frac{(e^x+e^{-x}.e^x+e^{-x})+(e^x - e^{-x}.e^x - e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2}$

= $\frac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}$

= $\frac{(e^x+e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2} - \frac{(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}$

= 1 $- \frac{(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}$

= 1$- tanh^2 x$ (berdasarkan sifat 3.1(3) tanh $x = sech^2 x$)

=sech x^2

Jadi terbukti $\frac{d\,(\tanh\, x)}{dx} = sech^2 x$

d. $\frac{d\,(\coth\, x)}{dx} = -csch^2 x$

$\frac{d\,(\coth\, x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x+e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\right)$ (sifat 3.1(4) coth $x = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\right)$

$= \frac{\left(e^x - e^{-x}.\frac{d}{dx}e^x+e^{-x}\right) - \left(e^x+e^{-x}.\frac{d}{dx}e^x - e^{-x}\right)}{(e^x - e^{-x})^2}$(berdasarkan aturan diferensiasi $\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right)\frac{\frac{d}{dx}(f)x\,g - fx\frac{d}{dx}(g)}{g^2}$)

$= \frac{(e^x - e^{-x}.e^x - e^{-x}) - (e^x + e^{-x}.e^x + e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^2}$

$= \frac{(e^x - e^{-x})^2 - (e^x + e^{-x})^2}{(e^x - e^{-x})^2}$

$= \frac{(e^x - e^{-x})^2}{(e^x - e^{-x})^2} - \frac{(e^x + e^{-x})^2}{(e^x - e^{-x})^2}$

$= 1 - \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

$= 1 - coth^2 x$

$= -csch^2 x$

Jadi terbukti $\frac{d\,(\coth\,x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x+e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\right)$

$e.\ \frac{d\,(\text{sech}\ x)}{dx} = -\tanh x . \text{sech}\, x$

$= \frac{d}{dx}\frac{2}{e^x + e^{-x}}$(berdasarkansifat 3.1 (5) sech x=$\frac{2}{e^x + e^{-x}}$)

$= \frac{(e^x + e^{-x})\frac{d}{dx}(2)) - (2.\frac{d}{dy}(e^x + e^{-x}))}{(e^x + e^{-x})^2}$(berdasarkan aturan diferensiasi $\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right)\frac{\frac{d}{dx}(f)x\,g - f x\frac{d}{dx}(g)}{g^2}$)

$= \frac{(e^x - e^{-x}.0) - (2e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2}$

$= \frac{-2e^x - e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2}$

$= \frac{-e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} . \frac{2}{e^x + e^{-x}}$

$= -\tanh x . \text{sech}\, x$(berdasarkan sifat 3.1(3) dan 2.2 (5))

Jadi terbukti $\frac{d\,(\text{sech}\ x)}{dx} = -\tanh x . \text{sech}\, x$

Contoh

1. Tentukan turunan dari fungsi hiperbolik f(x)=sinh x+ cosh x

Pembahasan

$\frac{d\,(\sinh x + \cosh x)}{dx} = \frac{d\,(\sinh\,x)}{dx} + \frac{d\,(\cosh x)}{dx}$ (berdasarkan aturan diferensiasi $\frac{d(a+b)}{dx} = \frac{d(a)}{dx} + \frac{d(b)}{dx}$)

= cosh x + sinh x (berdasarkan teorema 3.3(a) dan teorema 3.3 (b)

$= \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ (berdasarkan sifat 3.1(1)(2))

$= \frac{e^x \cancel{+ e^{-x}} + e^x \cancel{- e^{-x}}}{2}$

$= \frac{\cancel{2}e^x}{\cancel{2}}$

$= e^x$

2. Tentukan turunan dari fungsi hiperbolik f(x)=sinh x- cosh x

Pembahasan

$\frac{d\,(\sinh x - \cosh x)}{dx} = \frac{d\,(\sinh\,x)}{dx} - \frac{d\,(\cosh x)}{dx}$ (berdasarkan aturan diferensiasi $\frac{d(a-b)}{dx} = \frac{d(a)}{dx} - \frac{d(b)}{dx}$)

= cosh x - sinh x (berdasarkan teorema 3.3(a) dan teorema 3.3 (b)

$= \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ (berdasarkan sifat 3.1(1)(2))

$= \frac{\cancel{e^x} + e^{-x} \cancel{- e^x} + e^{-x}}{2}$

$= \frac{\cancel{2}e^{-x}}{\cancel{2}}$

$= e^{-x}$

3. Tentukan turunan dari fungsi hiperbolik f(x)=sinh x cosh x

Pembahasan

$\frac{d\,(\sinh x \cosh x)}{dx} = \frac{d\,(\sinh x)}{dx}.\cosh x + \sinh x\,.\frac{d\,(\cosh x)}{dx}$ (berdasarkan aturan diferensiasi $\frac{d(ab)}{dx} = \frac{d(a)}{dx}.b + a.\frac{d(b)}{dx}$)

= cosh x. cosh x + sinh x. sinh x (berdasarkan teorema 3.3(a) dan teorema 3.3 (b)

= $cosh^2x + sinh^2x$

= cosh 2x

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang telah dikemukakan diatas maka disimpulkan bahwa Turunan sebuah fungsi f adalah fungsi lain f' yang memiliki nilai pada sebuah bilangan x didefinisikan sebagai $f'(x)$ = $\lim_{h\to 0} \frac{f\,(x+h)-f\,(x)}{h}$. Jika limit itu ada, dikatakan bahwa fungsi tersebut terdiferensialkan pada x. Pencarian turunan disebut pendiferensialan. Dalam matematika kombinasi-kombinasi dari fungsi eksponen e^x dan e^{-x} diberi nama khusus suatu fungsi yang memuat kombinasi dari kedua fungsi yakni fungsi hiperbolik. Untuk itu dibangun fungsi p dan q sebagai berikut. P : R→$R^+, p\ (x) = \frac{e^x}{2}$ dan q: R→R^+, $q\ (x) = \frac{e^{-x}}{2}$

REFERENSI

Aqilah, I., Hayya, F., & Matematika, P. (2021). *Bahan proyek turunan*.

Asyhar, B. (2018). Aplikasi Turunan (Derivatif) Dalam Permasalahan Analisis Keuntungan Maksimum. *Al-Khwarizmi: Jurnal Pendidikan Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam*, *2*(1), 1–14. https://doi.org/10.24256/jpmipa.v2i1.98

Faisal, M. M., Konveks, F., & Real, B. (2012). *Micki Muhammad Faisal, 2012 Fungsi Konveks Bernilai Real Universitas Pendidikan Indonesia | repository.upi.edu*. 1–3.